

УДК 535.24; 535.6  
DOI: 10.18799/29495407/2024/3/67  
Шифр специальности ВАК:01.04.05

## Статистические характеристики оптических вихрей и интегральных параметров лазерного излучения на трассе беспроводной передачи энергии

Ф.Ю. Канев<sup>1</sup>, Н.А. Макенова<sup>1,2✉</sup>, И.Д. Веретехин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск*

<sup>2</sup> *Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск*

✉ makenova@tpu.ru

**Аннотация.** Цель настоящего исследования – сравнение параметров лазерных пучков, начальная фаза которых формируется полиномами Цернике, и пучков, фаза которых задается экраном, моделирующим атмосферную турбулентность. Проведение исследования было обусловлено широким применением лазерного излучения в установках передачи энергии и информации и необходимостью компенсации искажений излучения на атмосферных трассах. Решение поставленных задач было реализовано на основе методов численного эксперимента. Для проведения анализа в плоскости наблюдения фиксировались оптические вихри, появившиеся в процессе распространения, и интегральные характеристики излучения, такие как критерий фокусировки (мощность в пределах заданной апертуры), энергетический радиус и смещение центра пучка. Показано, что статистические параметры распределения особых точек в обоих случаях (полиномы и экран) удовлетворяли требованиям центральной предельной теоремы. В то же время различия наблюдались в зависимости числа вихрей и интегральных характеристик излучения от длины трассы распространения.

**Ключевые слова:** оптические вихри, особые точки волнового фронта, лазерное излучение, атмосферная турбулентность, спектр фон Кармана, беспроводная передача энергии, оптические линии связи

**Благодарности:** Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания Института оптики атмосферы.

**Для цитирования:** Канев Ф.Ю., Макенова Н.А., Веретехин И.Д. Статистические характеристики оптических вихрей и интегральных параметров лазерного излучения на трассе беспроводной передачи энергии // Известия Томского политехнического университета. Промышленная кибернетика. – 2024. – Т. 2. – № 3. – С. 47–56.  
DOI: 10.18799/29495407/2024/3/67

---

UDC 535.24; 535.6  
DOI: 10.18799/29495407/2024/3/67

## Statistical characteristics of optical vortices and integral parameters of laser radiation on a wireless power transmission path

F.Yu. Kanev<sup>1</sup>, N.A. Makenova<sup>1,2✉</sup>, I.D. Veretekhin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Institute of Atmospheric Optics SB RAS, Tomsk, Russian Federation*

<sup>2</sup> *National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation*

✉ makenova@tpu.ru

**Abstract.** The aim of this study is to compare the parameters of laser beams, which initial phase is formed by Zernike polynomials, and beams, which phase is specified by a screen simulating atmospheric turbulence. The study was conducted due to the widespread use of laser radiation in energy and information transmission systems and the need to compensate for radia-

tion distortions on atmospheric route. The solution of the set tasks was implemented based on the methods of numerical experiment. For the analysis in the plane of observation optical vortices, appeared during propagation, and radiation integral characteristics, such as the focusing criterion (power within a given aperture), energy radius and shift of the beam center, were recorded. It was shown that statistical parameters of the distribution of singular points in both cases (polynomials and screen) satisfied the requirements of the central limit theorem. At the same time, differences were observed in the dependence of the number of vortices and integral characteristics of radiation on the length of the propagation path.

**Keywords:** optical vortices, singular points of the wave front, laser radiation, atmospheric turbulence, von Karman spectrum, wireless power transmission, optical communication lines

**Acknowledgements:** The research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the State task of the Institute of Atmospheric Optics.

**For citation:** Kanev F.Yu., Makenova N.A., Veretekhin I.D. Statistical characteristics of optical vortices and integral parameters of laser radiation on a wireless power transmission path. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Industrial Cybernetics*, 2024, vol. 2, no. 3, pp. 47–56. DOI: 10.18799/29495407/2024/3/67

## Введение

В работе [1], опубликованной еще в 1970-е гг., было показано, что двумерный фазовый экран, структурная функция которого удовлетворяет закону Колмогорова–Обухова [2–4], может быть представлен как сумма ряда, членами которого являются полиномы Цернике [5, 6]. Ошибка аппроксимации экрана определяется числом входящих в ряд полиномов и быстро убывает с увеличением их числа. Статья [1] приобрела широкую известность сразу после публикации и, несмотря на большой промежуток времени, прошедший после ее выхода, не потеряла актуальности до настоящего времени, ссылки на нее появляются в современных работах [7, 8].

В связи с тем, что использование полиномов для моделирования искажений излучения продолжает оставаться актуальным, нами был рассмотрен еще один аспект данной задачи, а именно, проведение сравнения параметров пучков, начальная фаза которых была задана полиномами и экраном, моделирующим турбулентность, отмечены сходства и различия полученного в результате распространения амплитудного распределения. Решение проводилось с привлечением методов численного эксперимента. Варьируемым параметром задачи в обоих случаях являлась длина трассы, при использовании экрана также изменялся радиус Фрида, характеризующий интенсивность искажений [9], и внутренний масштаб турбулентности [10–12]; при введении полиномов варьировалось их число и коэффициент, на который умножалась соответствующая формула. Регистрируемые параметры – число особых точек (оптических вихрей), возникающих в волновом фронте [13, 14], а также интегральные характеристики излучения – энергетический радиус, смещение центра пучка и критерий фокусировки [15]. В анализе характеристик массива дислокаций, выполненном в настоящей статье, учитывались только статистические характеристики их множества, особенности возникновения и траекто-

рии движения вихрей (подобные исследования были выполнены в [16]) не рассматривались.

## Появление особых точек в волновом фронте излучения при задании начальной фазы непрерывной функцией

При моделировании источника излучения распределение амплитуды в плоскости его апертуры задавалось гауссовой функцией

$$E_0(x, y) = A_0 \exp(-(x^2 + y^2) / 2a_0^2), \quad (1)$$

тогда как фаза формировалась одним из полиномов Цернике [5], или для ее задания использовался фазовый экран, моделирующий турбулентные искажения показателя преломления со спектром пространственных частот  $\kappa$ , задаваемых формулой фон Кармана [10–12]:

$$\Phi_n(\kappa) = 0,033C_n^2(\kappa_L^2 + \kappa^2)^{-11/6} \exp(-\kappa^2 / \kappa_m^2), \\ \kappa_L = 2\pi / L_0, \kappa_m = 5,92 / l_0. \quad (2)$$

В построенной модели система координат была введена таким образом, чтобы обеспечить направление распространения пучка вдоль оси  $Z$ , тогда оси  $X$  и  $Y$  лежали в плоскости перпендикулярной этому направлению. В формуле (1), задающей граничные условия,  $A_0$  – значение амплитуды в центре пучка,  $a_0$  – его начальный радиус. В (2)  $\kappa_L^2$  и  $\kappa_m^2$  – минимальное и максимальное значения пространственных частот, определяемых внутренним  $l_0$  и внешним  $L_0$  масштабом турбулентности,  $C_n$  – структурная постоянная, связанная с радиусом Фрида  $r_0$  известным соотношением [17]. Распространение пучка описывалось волновым уравнением [18], при численном решении которого координаты в плоскости  $XOY$ , значение радиуса Фрида и масштабы турбулентности нормировались на начальный радиус  $a_0$ , нормировка вдоль координаты  $Z$  была выполнена на дифракционную длину  $Z_d = ka_0^2$ , где  $k$  – волновое число. Регистрация опти-

ческих вихрей осуществлялась с использованием методов, описанных в [19].

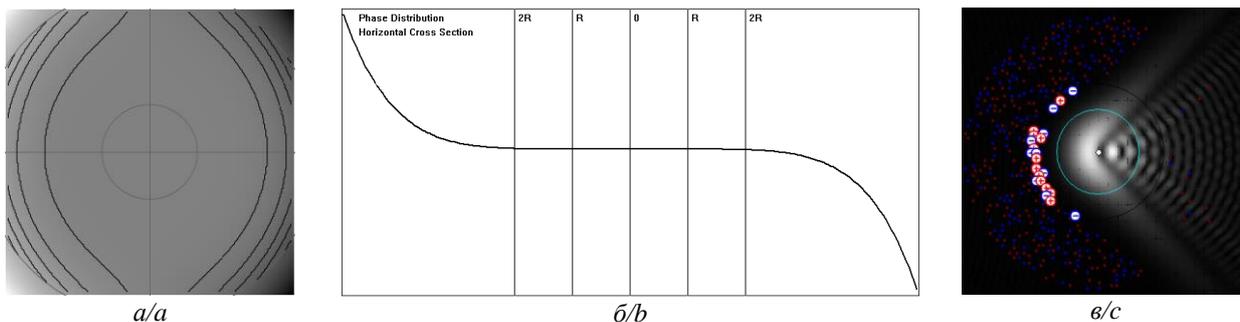
Как показали численные эксперименты в обоих рассматриваемых случаях (т. е. когда начальная фаза – это сумма полиномов или турбулентный экран) амплитудный профиль пучка значительно изменялся в процессе распространения, и в его волновом фронте появлялись особые точки. В качестве примера на рис. 1 приводится распределение амплитуды в плоскости наблюдения при задании фазы полиномом № 7 (кома)

$$a_i \cdot 2\sqrt{2} \cdot (3r^3 - 2r) \sin \Theta. \quad (3)$$

Уравнение (3) записано в полярных координатах  $r$  и  $\Theta$ , также в него введен коэффициент  $a_i$ , влияющий на величину вносимой aberrации,  $i$  – номер полинома. Рис. 1, в показывает, что сформированное в плоскости наблюдения распределение амплитуды значительно отличается от гауссовской функции, а в

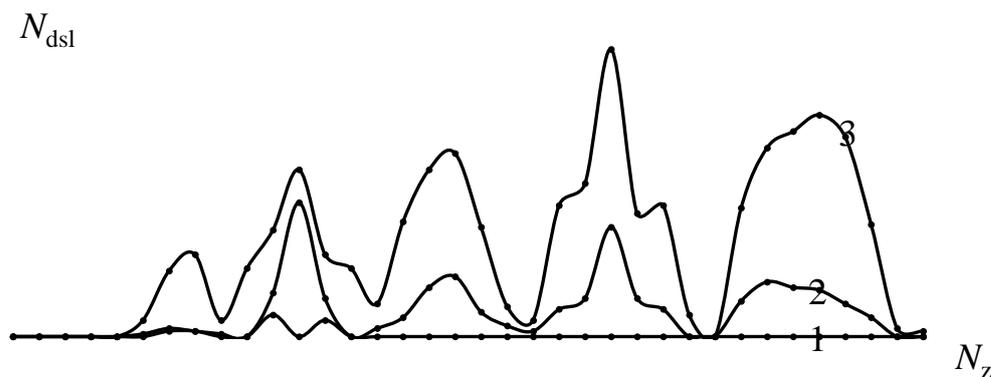
волновом фронте появляются точки с нулевыми значениями интенсивности и оптические вихри с топологическим зарядом  $\pm 1$ , которые на рис. 1, в обозначены кружками со знаками «+» и «-».

Проведенные численные исследования показали, что не все полиномы обеспечивают появление в волновом фронте особых точек, в частности первые пять aberrаций (два наклона во взаимно перпендикулярных плоскостях, два астигматизма второго порядка и фокусировка) не приводят к достаточным для развития оптических вихрей искажениям. Вихри появляются (рис. 2) только при задании фазы полиномами начиная с 6, а их количество зависит от размеров области регистрации и коэффициента  $a_i$ . В целом можно заключить, что для развития вихрей необходимым является использование при задании начальных условий полиномов третьего и более высоких порядков, т. е. введение достаточно сложных aberrаций в фазу излучения.



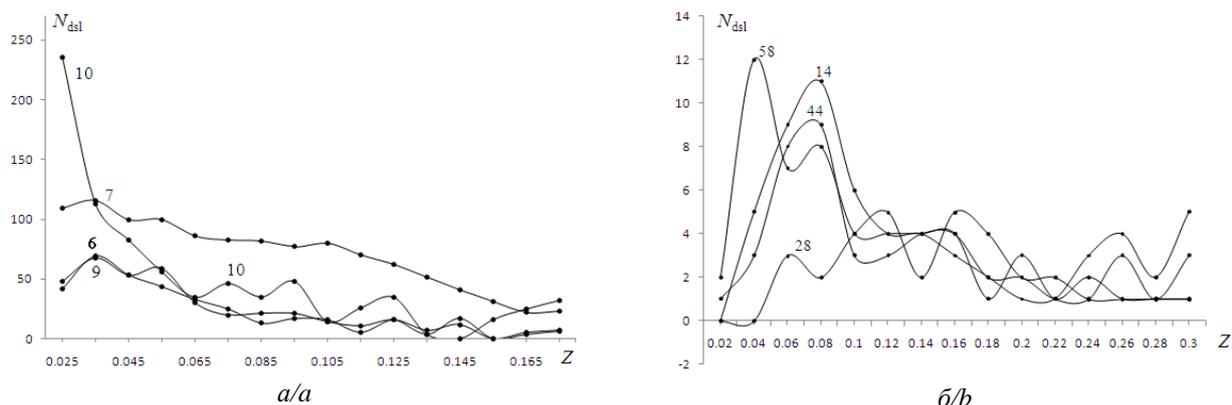
**Рис. 1.** Начальный фазовый профиль пучка (а), заданный полиномом № 7 (кома), изгиб поверхности показан полутонами и линиями равного уровня; б) поперечное сечение фазового профиля; в) распределение амплитуды излучения (с указанными на нем вихрями), зарегистрированное на расстоянии  $Z=0,1$

**Fig. 1.** Initial phase profile of the beam (a), given by polynomial No. 7 (coma), the surface bending is shown by halftones and equal-level lines; (b) cross-section of the phase; (c) distribution of radiation amplitude with the vortices indicated on it, recorded at a distance of  $Z=0.1$



**Рис. 2.** Количество особых точек  $N_{dsl}$  в пучке при задании начальной фазы различными полиномами.  $N_z$  – номер полинома,  $a_i=1$ ,  $Z=0,1$ . Кривая 1 получена при регистрации вихрей в области с диаметром равным начальному диаметру пучка; 2 – диаметр был увеличен до 1,2; 3 – до 1,4 начального диаметра

**Fig. 2.** Number of special points  $N_{dsl}$  in the beam, when the initial phase is specified by different polynomials.  $N_z$  is the polynomial number,  $a_i=1$ ,  $Z=0.1$ . Curve 1 was obtained when registering vortices in a region with a diameter equal to the initial diameter of the beam; 2 – the diameter was increased to 1.2; 3 – to 1.4 of the initial diameter



**Рис. 3.** Зависимость количества вихрей от длины трассы при задании фазы полиномами (а) и экраном, моделирующим турбулентность (б). а) указаны номера полиномов (кома, уравнение 3 и кома с поворотом на  $90^\circ$ , трилистник, уравнение 4 и трилистник с поворотом на  $90^\circ$ ), формирующих начальную фазу (нумерация OSA); б) номера случайных экранов (числа, являющиеся основанием при работе генератора случайных чисел),  $r_0=0,6$

**Fig. 3.** Dependence of the number of vortices on the path length when the phase is specified by polynomials (a) and a screen modeling turbulence (b). a) numbers of the polynomials (coma defined by Eq. 3 and coma turned by  $90^\circ$ , trefoil defined by Eq. 4 and trefoil turned by  $90^\circ$ ) that form the initial phase (OSA notation); b) numbers of random screens (numbers that are the basis for the operation of the random number generator),  $r_0=0.6$

Еще одной характерной особенностью распространения вихревого излучения является уменьшение числа особых точек при увеличении пройденного пучком расстояния. Соответствующие данные при задании фазы такими полиномами, как кома (3) и трилистник

$$a_i \cdot 2\sqrt{2} \cdot r^3 \sin 3\Theta, \quad (4)$$

представлены на рис. 3, а. На рисунке видны колебания  $N_{\text{dsl}}$  при общем стремлении функций к нулевым значениям, ярко выраженные экстремумы отсутствуют.

Особые точки также появляются, если начальная фаза задана экраном, моделирующим атмосферную турбулентность. В отличие от детерминированных полиномов экран формирует случайное двумерное распределение, поэтому количество особых точек в пучке изменяется при вариациях его номера. В качестве иллюстрации на рис. 3, б для четырех выбранных экранов приводятся зависимости  $N_{\text{dsl}}$  от длины трассы. Можем видеть, что во всех рассмотренных вариантах функции испытывают значительные колебания, в некоторых случаях появляются достаточно выраженные максимумы (рис. 3, б, кривые с номерами 58, 14 и 44), но, как и в предыдущем примере (рис. 3, а), с увеличением расстояния число дислокаций уменьшается.

#### Статистика вихрей при формировании начальной фазы полиномами Цернике и экраном, моделирующим турбулентность

Приведенные в предыдущем разделе данные были получены для полиномов, задаваемых опре-

деленными формулами, и отдельных экранов, т. е. в условиях, когда фазовый профиль пучка является полностью детерминированным. Для моделирования случайных искажений, проявляющихся в турбулентной среде, экраны варьируются, соответствующим образом изменяется фаза излучения, что приводит к формированию случайного распределения особых точек в волновом фронте. Получить стохастическое распределение фазы и сравнить его статистические характеристики с характеристиками турбулентных искажений можно и при использовании полиномов, для чего в качестве коэффициентов  $a_i$ , входящих в формулы (3), (4) и аналогичные, необходимо использовать случайные числа, изменяющиеся в определенном диапазоне.

При сравнении распределения особых точек, полученных в двух вариантах задания фазы (экран и полиномы), была выполнена проверка соответствия статистических параметров случайных множеств требованиям центральной предельной теоремы [20]. Напомним, что согласно теореме распределение значений выборки приблизительно нормально, если размер выборки достаточно велик, даже если распределение населения не является нормальным. Приведенная формулировка означает, что функция распределения вероятностей случайной величины  $x$  может быть описана формулой

$$f(x, \mu, \sigma^2) = F(x) \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (5)$$

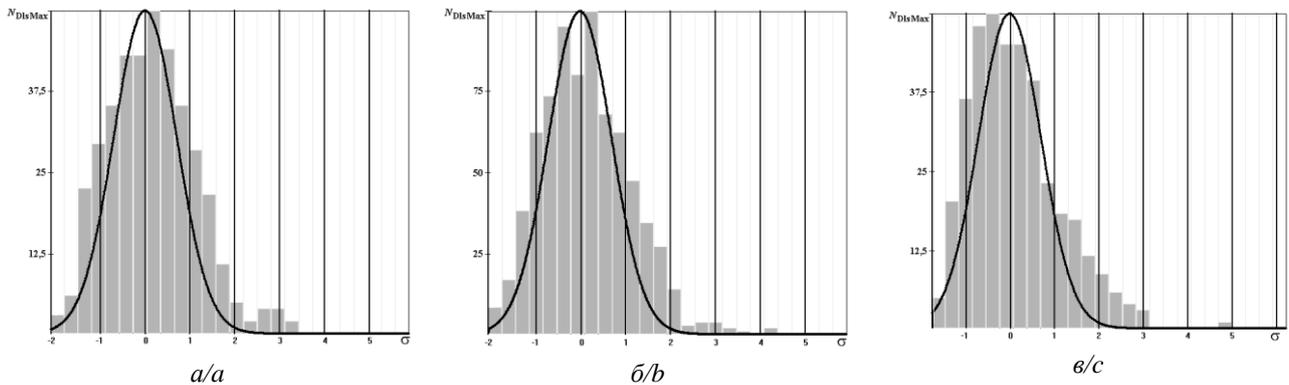
В уравнении (5)  $\sigma$  – стандартное отклонение;  $\mu$  – среднее значение;  $F(x)$  – амплитуда функции. Согласно требованиям теоремы 68,9 % значений па-

раметра  $x$  должны находиться в интервале от  $-\sigma$  до  $\sigma$ ; 95,5 % в интервале  $-2\sigma \div 2\sigma$  и 99,7 в интервале  $-3\sigma \div 3\sigma$  (так называемое «правило 69–96–100»).

Гистограммы, иллюстрирующие статистические свойства распределения вихрей, приведены на рис. 4, данные были зарегистрированы при различном числе реализаций случайного процесса, в котором начальная фаза излучения задавалась экраном и полиномами, коэффициенты которых изменялись в интервале от 0 до 1,5, что обеспечило практически одинаковые экстремальные значения графиков. Визуально распределения похожи на гауссову функцию, хотя ее максимум не всегда совпадает с максимумом соответствующей гистограммы.

Количественные данные, характеризующие случайный процесс при различном числе реализаций, также приводятся в таблице. Средние значения числа вихрей для экрана и полиномов не совпада-

ют, что можно объяснить недостаточно точным выбором интервала изменения коэффициентов  $a_i$ . В то же время в обоих вариантах изменения средних значений при увеличении числа реализаций от 200 до 800 не превышают 3 %, т. е. для вычисления средних достаточно небольшого количества случайных вариаций фазы. Также с удовлетворительной точностью выполняется «правило 69–96–100». Наибольшее отклонение (около 7 %) от заданных значений здесь наблюдается для интервала  $-\sigma \div \sigma$ , соответствующие результаты были получены для экрана при 800 вариациях начальной фазы. В целом можно заключить, что при задании начальной фазы пучка экраном, моделирующим турбулентность, или полиномами Цернике со случайными коэффициентами требования центральной предельной теоремы выполняются с удовлетворительной точностью.



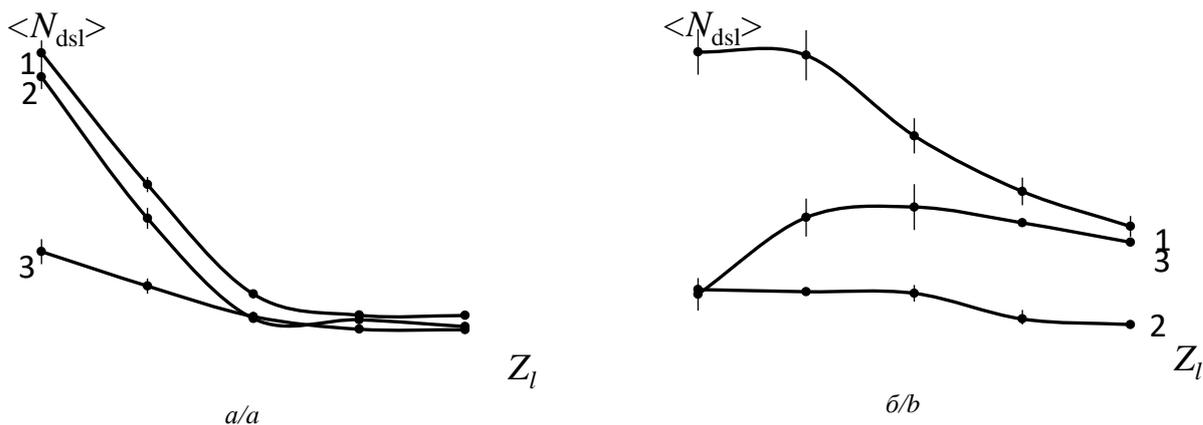
**Рис. 4.** Гистограммы случайного распределения оптических вихрей, иллюстрирующие выполнение центральной предельной теоремы. Сплошная линия – гауссова функция, соответствующая распределению. Число реализаций случайного процесса: а) 400; б) 800; в) 400. Фазовые искажения задаются экраном, моделирующим турбулентность (а, б) и рядом полиномов Цернике (в).  $N_{DiskMax}$  – число вихрей в одном интервале гистограммы

**Fig. 4.** Histograms of random distribution of optical vortices illustrating the fulfillment of the central limit theorem. The solid line is the Gaussian function corresponding to the distribution. The number of realizations of the random process: а) 400; б) 800; в) 400. Phase distortions are specified by a screen simulating turbulence (а, б) and a series of Zernike polynomials (с).  $N_{DiskMax}$  is the number of vortices in one interval of the histogram

**Таблица.** Средние значения числа вихрей  $\langle N_{dsi} \rangle$ , зарегистрированных в случайном процессе при различном числе реализаций  $N_{Relz}$ , и относительное (в процентах от общего количества) число вихрей, попадающих в различные интервалы регистрации, задаваемые квадратичным отклонением  $\sigma$

**Table.** Average values of the number of eddies  $\langle N_{dsi} \rangle$  registered in a random process with different numbers of  $N_{Relz}$  realizations, and the relative (as a percentage of the total number) number of eddies falling into different registration intervals, specified by the square deviation  $\sigma$

Источник искажений Source of distortion	Число реализаций $N_{Relz}$ Number of implementations $N_{Relz}$	$r_0$ или интервал изменения $a_i$ $r_0$ or the interval of change of $a_i$	$\langle N_{dsi} \rangle$	Кол-во вихрей в интервале/Number of vortices in the interval, %		
				$-\sigma \div \sigma$	$-2\sigma \div 2\sigma$	$-3\sigma \div 3\sigma$
Турб. экран Turbulent screen	200	0,6	7,7	71,4	94,5	98,5
	400	0,6	7,8	72,0	95,7	98,5
	800	0,6	7,6	64,5	96,1	98,9
Ряд полиномов Series of polynomials	200	$0 \div 1,5$	6,8	72,6	92,9	100,0
	400	$0 \div 1,5$	6,6	69,3	94,2	99,0
	800	$0 \div 1,5$	6,7	74,2	92,6	99,1



**Рис. 5.** Зависимость среднего числа  $\langle N_{dsi} \rangle$  зарегистрированных особых точек от длины трассы  $Z$ . Параметры задачи: а) ряд включает 30 (кривая 1), 20 (кривая 2) и 10 (кривая 3) полиномов. При задании фазы экраном, моделирующим атмосферную турбулентность, радиус Фрида и внутренний масштаб принимают следующие значения: б)  $r_0=0,6$ ,  $l_0=0,08$  (кривая 1);  $r_0=0,6$ ,  $l_0=2$  (кривая 2);  $r_0=0,2$ ,  $l_0=2$  (кривая 3). Усреднение выполняется по 300 реализациям

**Fig. 5.** Dependence of the average number  $\langle N_{dsi} \rangle$  of registered singular points on the path length  $Z$ . Problem parameters: а) the series includes 30 (curve 1), 20 (curve 2) and 10 (curve 3) polynomials. When the phase is specified by a screen simulating atmospheric turbulence, the Fried radius and internal scale take the following values: б)  $r_0=0.6$ ,  $l_0=0.08$  (curve 1);  $r_0=0.6$ ,  $l_0=2$  (curve 2);  $r_0=0.2$ ,  $l_0=2$  (curve 3). Averaging is performed over 300 realizations

Различия при формировании начальной фазы полиномами и экраном проявляются в характере зависимости числа особых точек от пройденного пучком расстояния (рис. 5) и в зависимости от других варьируемых параметров задачи. При задании фазы в виде суммы полиномов среднее число вихрей уменьшается с увеличением длины трассы, и кривые, зарегистрированные при различном числе членов ряда, проходят практически параллельно (рис. 5, а). Это означает, что в каждом сечении трассы количество вихрей зависит только от одного параметра – числа формирующих фазу полиномов.

При задании фазы моделирующим турбулентность экраном форма графиков (рис. 5, б) и количество особых точек в перпендикулярных направлении распространения плоскостях определяется радиусом Фрида  $r_0$  и внутренним масштабом  $l_0$ , который в рассматриваемых численных экспериментах изменялся от 0,08 (нормированное на начальный радиус расстояние между ближайшими узлами расчетной сетки) до 2, т. е. до диаметра пучка.

В каждом сечении трассы наибольшее зарегистрированное число особых точек наблюдалось для следующего набора параметров:  $r_0=0,6$  и  $l_0=0,08$  (кривая 1, рис. 5, б). Увеличение внутреннего масштаба до значений близких к диаметру пучка без изменения радиуса Фрида ( $r_0=0,6$  и  $l_0=2$ , кривая 2, рис. 5, б) приводит к значительному (на некоторых расстояниях более чем в 10 раз) уменьшению количества вихрей. Вариант  $r_0=0,2$  и  $l_0=2$  (кривая 3, рис. 5, б), в котором масштаб  $l_0$  равен диаметру пучка, а радиус Фрида уменьшен относительно вариантов,

соответствующих кривым 1 и 2, является промежуточным.

Динамика изменения количества вихрей в пучке при его распространении также различается для экрана и полиномов. Кривые 1, 3 на рис. 5, б проходят через экстремум (т. е. количество особых точек увеличивается на небольших расстояниях, затем уменьшается), тогда как на рис. 5, а уменьшение  $\langle N_{dsi} \rangle$  с увеличением  $Z$  является монотонным.

#### Характеристика искажений излучения с использованием интегральных параметров

Количество особых точек в волновом фронте излучения можно рассматривать в качестве одного из определяющих искажения параметров, которые более детально характеризуются рядом интегральных величин, например, критерием фокусировки [15], задаваемым следующей формулой

$$J(x, y, t) = \frac{1}{P_0} \iint \rho(x, y) I(x, y, t) dx dy. \quad (6)$$

Введенный таким образом критерий пропорционален относительной доле мощности излучения, попадающей в пределы апертуры заданных размеров. В формуле (6)  $P_0$  – полная мощность и  $I(x, y, t)$  – интенсивность излучения в точке с координатами  $x$  и  $y$ ;  $\rho(x, y) = \exp[-(x^2 + y^2)/S_a^2]$  – апертурная функция,  $S_a$  – радиус устройства регистрации, который при выполнении численных экспериментов был равен начальному радиусу пучка  $a_0$ .

Еще одной интегральной характеристикой является энергетический радиус, который вычисляется следующим образом:

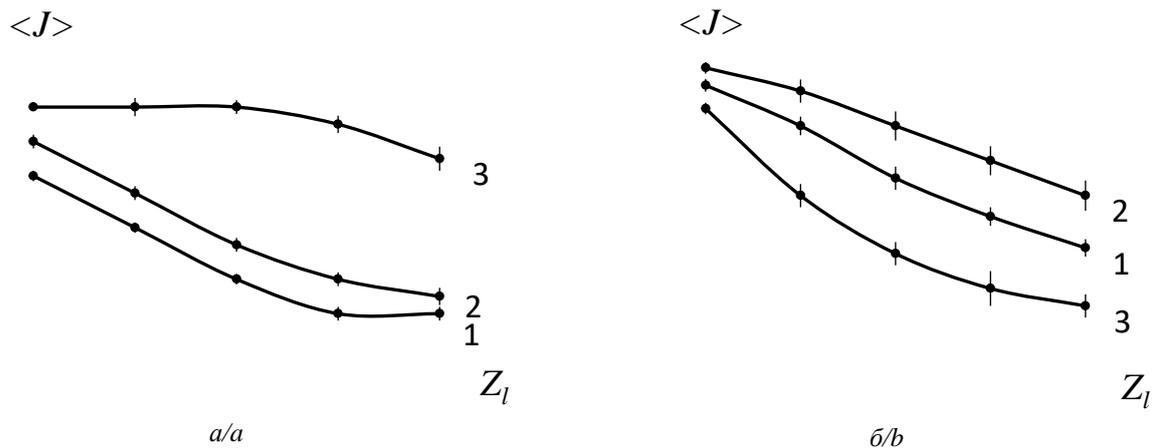
$$R_{\text{Eff}} = \left\{ \frac{1}{P_0 a_0} \iint (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_c)^2 I(x, y, t) dx dy \right\}^{1/2}. \quad (7)$$

В уравнении (7)  $\mathbf{r}_c$  – радиус-вектор положения энергетического центра пучка (параметр иногда называется центр тяжести пучка), который задается формулой

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{P_0 a_0} \iint \mathbf{r}_\perp I(x, y, t) dx dy. \quad (8)$$

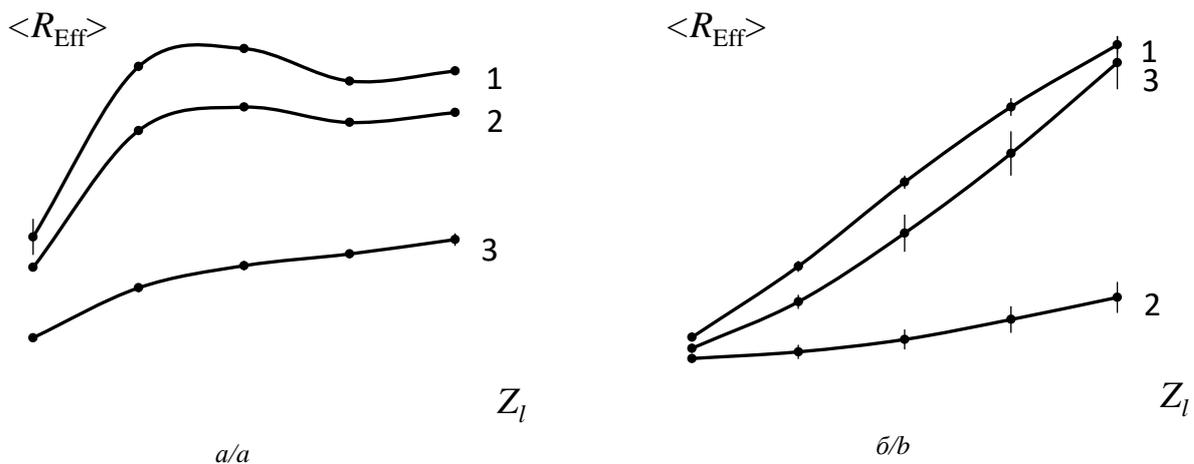
В формуле (8)  $\mathbf{r}_\perp$  – координаты на плоскости, перпендикулярной направлению распространения.

Графики зависимости средних значений критерия фокусировки, энергетического радиуса и смещения центра тяжести от пройденного пучком расстояния при задании начальной фазы полиномами и экраном помещены на рис. 6–8.



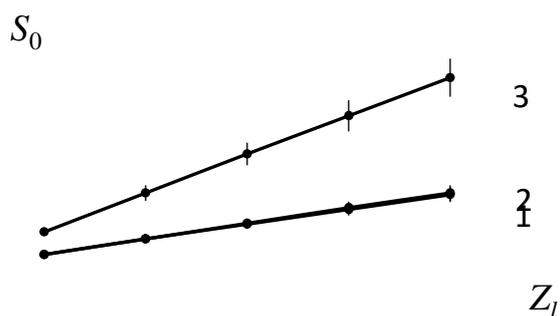
**Рис. 6.** Зависимость критерия фокусировки от длины трассы при задании искажений рядом полиномов Цернике (а) и фазовым экраном, моделирующим атмосферную турбулентность (б). Номера кривых соответствуют параметрам задачи, указанным в подписи к рис. 5

**Fig. 6.** Dependence of the focusing criterion on the path length when specifying distortions by a series of Zernike polynomials (a) and a phase screen simulating atmospheric turbulence (b). The curve numbers correspond to the problem parameters specified in the caption to Fig. 5



**Рис. 7.** Зависимость средних значений энергетического радиуса пучка от длины трассы. Номера кривых соответствуют параметрам задачи, указанным в подписи рис. 5

**Fig. 7.** Dependence of the average values of the beam energy radius on the path length. The curve numbers correspond to the parameters of the problem indicated in the caption of Fig. 5



**Рис. 8.** Смещение энергетического центра пучка. Номера кривых соответствуют параметрам задачи, указанным в подписи рис. 5

**Fig. 8.** Shift of the energy center of the beam. The curve numbers correspond to the parameters of the problem indicated in the caption of Fig. 5

При задании фазы в виде суммы ряда полиномов с увеличением длины трассы критерий  $J(x,y,t)$  монотонно убывает (рис. 6, а), тогда как график зависимости радиуса от  $Z$  проходит через экстремум (кривые 1, 2, рис. 7, а, 20 и 30 полиномов в фазе), затем значения  $\langle R_{\text{Eff}} \rangle$  убывают. При меньшем числе полиномов (кривая 3, 10 слагаемых) максимум не наблюдается, по-видимому, объяснить его наличие можно появлением общей дефокусировки, проявляющейся при увеличении числа полиномов от 10 до 20.

Относительно простой и до некоторой степени похожей на график для числа особых точек является зависимость интегральных параметров излучения в каждом из сечений трассы распространения от числа полиномов в сумме ряда. С увеличением количества слагаемых  $\langle N_{\text{dsl}} \rangle$  и  $\langle R_{\text{Eff}} \rangle$  увеличиваются,  $\langle J \rangle$  уменьшается (особенность видна на каждом из графиков (а) при фиксированном значении  $Z$ ), т. е. с ростом числа полиномов интенсивность искажений в каждой плоскости, перпендикулярной направлению распространения, возрастает.

При задании фазы экраном, моделирующим турбулентность, возмущения фазы определяются двумя параметрами – радиусом Фрида и внутренним масштабом турбулентности. Как и в предыдущем случае, когда фаза – это сумма полиномов, с увеличением длины трассы уменьшается критерий фокусировки (рис. 6, б), увеличивается эффективный радиус пучка (рис. 7, б). Дополнительная информация о пучке приводится на рис. 8, где помещена зависимость от  $Z$  смещения его энергетического центра, которое возрастает практически линейно с увеличением пройденного расстояния. Как было отмечено выше, самое большое количество особых точек соответствует варианту  $r_0=0,6$  и  $l_0=0,08$  (рис. 5, б, кривая 1), при реализации которого также регистрируется максимальное значение радиуса пучка (кривая 1, рис. 7, б), тогда как минимальное значение

критерия наблюдается для  $r_0=0,2$  и  $l_0=2$  (кривая 3, рис. 6, б), т. е. не при самом большом числе дислокаций. Объяснить эту особенность можно тем, что на смещение энергетического центра пучка, от которого зависит величина критерия, очень слабо влияет внутренний масштаб (рис. 8, кривые 1 и 2, соответствующие  $l_0=0,08$  и  $l_0=2$ , практически совпадают), т. е. при уменьшении масштаба  $l_0$  число вихрей возрастает, а смещение центра почти не изменяется.

По приведенным данным достаточно сложно определить условия, в которых проявляется наибольшая интенсивность турбулентных искажений. Если полагать, что максимальные искажения пучка означают максимальное увеличение его радиуса и появление максимального числа особых точек, то такие условия наблюдаются при реализации варианта  $r_0=0,6$  и  $l_0=0,08$ , если же считать, что максимум искажений означает минимальное значение критерия фокусировки и наибольшее смещение энергетического центра, то соответствующие условия возникают при  $r_0=0,2$  и  $l_0=2$

### Заключение

Представленные в статье результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. При задании фазы пучка непрерывной функцией, сформированной суммой высших (третьего и более высоких порядков) полиномов Цернике или экраном, моделирующим атмосферные искажения высокой интенсивности, в его волновом фронте появляются особые точки.
2. В обоих рассмотренных случаях (экран и полиномы) случайное распределение оптических вихрей удовлетворяет требованиям центральной предельной теоремы, т. е. является нормальным.
3. С увеличением числа полиномов, входящих в формирующий начальную фазу профиль, увеличивается число особых точек в волновом фронте пучка и его энергетический радиус, уменьшаются значения критерия фокусировки, т. е. увеличиваются искажения.
4. Более сложной является зависимость характеристик излучения от параметров фазового экрана, моделирующего турбулентность. Развитие искажений здесь наблюдается как при уменьшении радиуса Фрида, так и при уменьшении внутреннего масштаба турбулентности, разделить влияние этих двух факторов в настоящем исследовании не удалось.

В целом заключаем, что, изменяя число и коэффициенты полиномов Цернике, можно обеспечить статистические свойства генерируемого множества особых точек приблизительно такие же, какие получаются при моделировании атмосферной турбулентности, подобными являются и значения интегральных параметров излучения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Noll R.J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence // *J. Opt. Soc. Am.* – 1976. – Vol. 66. – № 3. – P. 207–211.
2. Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика. – М.: Наука, 1985. – 470 с.
3. Обухов А.М. Турбулентность и динамика атмосферы. – Л.: Гидрометеоздат, 1988. – 414 с.
4. Обухов А.М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока // *Изв. АН СССР, серия география и геофизика.* – 1941. – Т. 5. – № 4–5. – С. 453–466.
5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука. 1973. – 720 с.
6. Селиверстова Е.В., Щербина Г.А., Шурыгин Б.М. Алгоритм нахождения абберационных коэффициентов в космической оптико-электронной аппаратуре наблюдения // *Журнал радиоэлектроники.* – 2017. – № 12. – С. 1–18.
7. Венедиктов В.Ю., Горелая А.В., Шубенкова Е.В. Точность воспроизведения заданной формы волнового фронта с помощью управляемого гибкого зеркала // *Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ».* – 2017. – № 10. – С. 55–61.
8. Иванова Т.В., Анощенков Д.И. Анализ возможных распределений координат реальных лучей на входном зрачке оптической системы при аппроксимации волновой абберации полиномами Цернике // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики.* – 2018. – Т. 18. – № 1. – С. 9–14.
9. Fried D.L. Optical heterodyne detection of an atmospherically distorted signal wave front // *Proc. IEEE.* – 1967. – Vol. 55. – № 1. – P. 57–67. DOI: 10.1109/PROC.1967.5377
10. Karman T., Howarth L. On the statistical theory of isotropic turbulence // *Proc. R. Soc. A.* – 1938. – Vol. 164. – P. 192–215. DOI: 10.1098/rspa.1938.0013
11. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере / А.С. Гурвич, А.И. Кон, В.Л. Миронов, С.С. Хмелевцов. – М.: Наука, 1976. – 277 с.
12. Лукин В.П., Фортес Б.В. Адаптивное формирование пучков и изображений в атмосфере. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – 212 с.
13. Chen M., Roux F.S. Dipole influence on Shack–Hartmann vortex detection in scintillated beams // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2008. – Vol. 25. – № 5. – P. 1084–1090.
14. Generation of high-quality higher-order Laguerre–Gaussian beams using liquid-crystal-on-silicon spatial light modulators / Naoya Matsumoto, Taro Ando, Takashi Inoue, Yoshiyuki Ohtake, Norihiro Fukuchi, Tsutomu Hara // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2008. – Vol. 25. – № 7. – P. 1642–1651.
15. Канев Ф.Ю., Лукин В.П. Адаптивная оптика. Численные и экспериментальные исследования. – Томск: Изд-во Института оптики атмосферы СО РАН, 2005. – 250 с.
16. Wave and ray spatial dynamics of the light field in the generation, evolution, and annihilation of phase dislocations / V.P. Aksenov, I.V. Izmailov, B.N. Poizner, O.V. Tikhomirova // *Optics and Spectroscopy.* – 2002. – Vol. 92. – № 3. – P. 409–418.
17. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. – М.: Наука, 1985. – 335 с.
18. Распространение лазерного пучка в атмосфере / под ред. Д. Стробена. – М.: Мир, 1981. – 414 с.
19. Канев Ф.Ю., Аксенов В.П., Веретехин И.Д. Анализ точности алгоритмов регистрации оптических вихрей // *Оптика атмосферы и океана.* – 2021. – Т. 34. – № 1. – С. 5–16. DOI: 15372/AOO 202110101
20. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. – М.: Наука, 1981. – 640 с.

## Сведения об авторах

**Федор Юрьевич Канев**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории когерентной и адаптивной оптики Института оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, Россия, 634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1. [mna@iao.ru](mailto:mna@iao.ru)

**Наиля Алтынхановна Макенова**, научный сотрудник лаборатории когерентной и адаптивной оптики Института оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, Россия, 634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1; доцент Национального исследовательского Томского политехнического университета, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30. [makenova@tpu.ru](mailto:makenova@tpu.ru)

**Игорь Дмитриевич Веретехин**, инженер лаборатории когерентной и адаптивной оптики Института оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, Россия, 634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1. [mna@iao.ru](mailto:mna@iao.ru)

Поступила: 20.06.2024

Принята: 19.09.2024

Опубликована: 30.09.2024

## REFERENCES

1. Noll R.J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, vol. 66, no. 3, pp. 207–211.
2. Kolmogorov A.N. *Selected works. Mathematics and mechanics.* Moscow, Nauka Publ., 1985. 470 p. (In Russ.)
3. Obukhov A.M. *Turbulence and atmospheric dynamics.* Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1988. 414 p. (In Russ.)
4. Obukhov A.M. On the distribution of energy in the spectrum of a turbulent flow. *Izvestiya AN SSSR, series Geography and Geophysics*, 1941, vol. 5, no. 4–5, pp. 453–466. (In Russ.)
5. Born M., Wolf E. *Fundamentals of optics.* Moscow, Nauka Publ., 1973. 720 p. (In Russ.)
6. Seliverstova E.V., Shcherbina G.A., Shurygin B.M. Algorithm for finding aberration coefficients in space optical-electronic observation equipment. *Journal of Radio Electronics*, 2017, no. 12, pp. 1–18. (In Russ.)
7. Venediktov V.Yu., Gorelaya A.V., Shubenkova E.V. Accuracy of playing a type wave front shape with a controlled flexible mirror. *LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science*, 2017, no. 10, pp. 55–61. (In Russ.)

8. Ivanova T.V., Anoshchenkov D.I. Analysis of possible distributions of coordinates of real rays on the entrance pupil of an optical system when approximating wave aberration by Zernike polynomials. *Scientific and Technical Bulletin of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2018, vol. 18, no. 1, pp. 9–14. (In Russ.)
9. Fried D.L. Optical heterodyne detection of an atmospherically distorted signal wave front. *Proc. IEEE*, 1967, vol. 55, no. 1, pp. 57–67. DOI: 10.1109/PROC.1967.5377
10. Karman T., Howarth L. On the statistical theory of isotropic turbulence. *Proc. R. Soc. A.*, 1938, vol. 164, pp. 192–215. DOI: 10.1098/rspa.1938.0013
11. Gurvich A.S., Kon A.I., Mironov V.L., Khmelevtsov S.S. *Laser radiation in a turbulent atmosphere*. Moscow, Nauka Publ., 1976. 277 p. (In Russ.)
12. Lukin V.P., Fortes B.V. *Adaptive formation of beams and images in the atmosphere*. Novosibirsk, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences Publ. House, 1999. 212 p. (In Russ.)
13. Chen M., Roux F.S. Dipole influence on Shack–Hartmann vortex detection in scintillated beams. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 2008, vol. 25, no. 5, pp. 1084–1090.
14. Naoya Matsumoto, Taro Ando, Takashi Inoue, Yoshiyuki Ohtake, Norihiro Fukuchi, Tsutomu Hara. Generation of high-quality higher-order Laguerre–Gaussian beams using liquid-crystal-on-silicon spatial light modulators. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 2008, vol. 25, no. 7, pp. 1642–1651.
15. Kanev F.Yu., Lukin V.P. *Adaptive optics. Numerical and experimental studies*. Tomsk, Institute of Atmospheric Optics SB RAS Publ. house, 2005. 250 p. (In Russ.)
16. Aksenov V.P., Izmailov I.V., Poizner B.N., Tikhomirova O.V. Wave and ray spatial dynamics of the light field in the generation, evolution, and annihilation of phase dislocations. *Optics and Spectroscopy*, 2002, vol. 92, no. 3, pp. 409–418.
17. Vorontsov M.A., Shmalgauzen V.I. *Principles of adaptive optics*. Moscow, Nauka Publ., 1985. 335 p. (In Russ.)
18. *Propagation of a laser beam in the atmosphere*. Ed. by D. Stoben. Moscow, Mir Publ., 1981. 414 p. (In Russ.)
19. Kanev F.Yu., Aksenov V.P., Veretekhin I.D. Precision of algorithms for detecting optical vortices. *Optika Atmosfery i Okeana*, 2021, vol. 34, no. 1, pp. 5–16. (In Russ.) DOI: 15372/AOO 202110101
20. Akhmanov S.A., Dyakov Yu.E., Chirkin A.S. *Introduction to statistical radiophysics and optics*. Moscow, Nauka Publ., 1981. 640 p. (In Russ.)

#### Information about the authors

**Feodor Yu. Kanev**, Dr. Sc., Leading Research Scientists, V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics SB RAS, 1, Academician Zuev square, Tomsk, 634055, Russian Federation. mna@iao.ru

**Nailia A. Makenova**, Research Scientist, V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics SB RAS, 1, Academician Zuev square, Tomsk, 634055, Russian Federation; Assistant Professor, National research Tomsk Polytechnic University, 30, Lenin avenue, Tomsk, 634050, Russian Federation. makenova@tpu.ru

**Igor D. Veretekhin**, Engineer, V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics SB RAS, 1, Academician Zuev square, Tomsk, 634055, Russian Federation. mna@iao.ru

Received: 20.06.2024

Revised: 19.09.2024

Accepted: 30.09.2024