

УДК 621.313.2:62-83  
DOI: 10.18799/29495407/2023/4/41  
Шифр специальности ВАК: 2.3.1

## **Аналитическая модель динамической системы «широотно-импульсный преобразователь – двигатель постоянного тока с независимым возбуждением»**

**А.С. Глазырин<sup>1,2</sup>, Е.И. Попов<sup>3✉</sup>, В.А. Копырин<sup>3</sup>, С.Н. Кладиев<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> *Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Россия, г. Томск*

<sup>2</sup> *Югорский государственный университет, Россия, г. Ханты-Мансийск*

<sup>3</sup> *Тюменский индустриальный университет, Россия, г. Тюмень*

✉ popovei72@mail.ru

**Аннотация.** Классический подход к моделированию широкоотно-импульсных преобразователей, питающих двигатель постоянного тока с независимым возбуждением, линейным дифференциальным уравнением первого порядка позволяет существенно упростить и ускорить расчет динамической системы. Однако при этом теряется информация о высокочастотных физических процессах, протекающих в реальной системе. В статье предложена аналитическая модель динамической системы «широотно-импульсный преобразователь – двигатель постоянного тока с независимым возбуждением» с представлением модели широкоотно-импульсного преобразователя как прямоугольного сигнала, получаемого в виде суммы задержанных функций Хевисайда. Предложенная аналитическая модель рекомендована для исследования динамических режимов электроприводов постоянного тока с независимым возбуждением и позволяет аналитически применять методы теории автоматического управления к динамической системе, а также получать полную информацию о спектральном составе переменных состояния.

**Ключевые слова:** широкоотно-импульсный преобразователь, двигатель постоянного тока с независимым возбуждением, система обыкновенных дифференциальных уравнений, преобразование Лапласа, аналитическое решение, аналитическая модель

**Для цитирования:** Аналитическая модель динамической системы «широотно-импульсный преобразователь – двигатель постоянного тока с независимым возбуждением» / А.С. Глазырин, Е.И. Попов, В.А. Копырин, С.Н. Кладиев // Известия Томского политехнического университета. Промышленная кибернетика. – 2023. – Т. 1. – № 4. – С. 34–45. DOI: 10.18799/29495407/2023/4/41

---

UDC 621.313.2:62-83  
DOI: 10.18799/29495407/2023/4/41

## **Analytical model of a dynamic system «pulse-width converter – DC motor with independent excitation»**

**A.S. Glazyrin<sup>1,2</sup>, E.I. Popov<sup>3✉</sup>, V.A. Kopyrin<sup>3</sup>, S.N. Kladiev<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> *National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation*

<sup>2</sup> *Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Russian Federation*

<sup>3</sup> *Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation*

✉ popovei72@mail.ru

**Abstract.** The classical approach to modeling pulse-width converters feeding a DC motor with independent excitation using a first-order linear differential equation can significantly simplify and speed up the calculation of a dynamic system. However, in this case, information about high-frequency physical processes occurring in a real system is lost. The article proposes an analytical model of the dynamic system “pulse-width converter – DC motor with independent excitation” with representation

of the pulse-width converter model as a rectangular signal obtained as a sum of delayed Heaviside functions. The proposed analytical model is recommended for investigation of dynamic modes of DC motors with independent excitation and allows one to analytically apply methods of automatic control theory to a dynamic system, as well as obtain complete information about the spectral composition of state variables.

**Keywords:** pulse-width converter, DC motor with independent excitation, system of ordinary differential equations, Laplace transform, analytical solution, analytical model

**For citation:** Glazyrin A.S., Popov E.I., Kopyrin V.A., Kladiev S.N. Analytical model of a dynamic system «pulse-width converter – DC motor with independent excitation». *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Industrial Cybernetics*, 2023, vol. 1, no. 4, pp. 34–45. DOI: 10.18799/29495407/2023/4/41

## Введение

Электрический привод является одной из важнейших частей практически любого технологического процесса. При этом в рамках четвертой промышленной революции к электроприводу предъявляются все более жесткие требования по быстродействию и точности работы, а также способности функционировать с заданными показателями качества при изменении режима работы технической системы.

В современной литературе для решения данных проблем, а также для обеспечения прогнозирования работы электропривода в различных режимах и синтеза оптимальных алгоритмов управления предлагается использовать цифровые двойники электропривода [1–3]. Под цифровым двойником понимается не только цифровая модель электропривода, но и совокупность двусторонних информационных связей с реальным объектом [4]. Следовательно, задачей цифрового двойника является идентификация реальной динамической системы на основе наблюдаемых переменных состояния, получаемых от датчиков, в том числе и с применением методов машинного обучения для задач диагностики, мониторинга и анализа как типовых, так и нештатных динамических режимов электроприводов [5, 6].

Идентификация динамической системы по измерениям её входа–выхода может быть выполнена как в установившихся, так и в переходных режимах. Для установившихся режимов динамических систем проблема плохой обусловленности [7] систем уравнений проявляется особенно остро [8]. Переходные режимы могут характеризоваться сильным уровнем помех [8], в том числе импульсного характера [9]. Следовательно, для выполнения идентификации динамической системы необходимо знать некоторую априорную информацию о ее поведении.

Данная проблема также актуальна при разработке новых типов электродвигателей. Особенно остро она проявляется в вопросах проектирования и исследования малошумных электроприводов. Так, например, известны работы [10, 11] по разработке электродвигателей с совмещенными обмот-

ками статора, заключающимися в параллельном соединении обмотки по схеме «звезда» с обмоткой по схеме «треугольник». Преимуществом таких конструкций является существенное улучшение гармонического состава электрических и магнитных величин электрической машины (магнитодвижущая сила и токи статора), снижение потерь мощности и т. д.

Иным подходом к уменьшению высших гармоник в электрических машинах является применение для питания электродвигателей автономных инверторов с переменяющейся широтно-импульсной модуляцией (ШИМ) [12, 13]. Использование в алгоритмах управления преобразователем переменной ШИМ позволяет поддерживать коэффициент пульсаций электромагнитного момента и входных токов активного выпрямителя на заданном уровне в широком диапазоне изменения нагрузок.

Приведенные в работах [10–13] спектры электрических и магнитных величин могут быть получены как непосредственно на физической модели, так и на математической в рамках вычислительного эксперимента. Во втором случае информацию о спектрах электрических величин несут переменные состояния динамической системы в дискретном времени, полученные методами численного интегрирования.

При этом возникает вопрос выбора шага интегрирования, поскольку на модели динамических систем в дискретном времени накладываются ограничения, связанные с теоремой Котельникова–Шеннона–Найквиста [14]. Это означает принципиальную невозможность получения информации о быстро протекающих процессах в системе, собственная частота которых больше половины частоты дискретизации. Следовательно, значения высокочастотных составляющих переменных состояния, полученных в модели в дискретном времени, могут содержать артефакты, вызванные несовершенством самой дискретной модели, а не характером и физической поведением непосредственно динамической системы.

Таким образом, понятия «измерения» в вопросах задачи идентификации и решения обратных

задач должны трактоваться шире, чем только непосредственное измерение физических величин при наблюдении за объектом. Под «измерениями» могут пониматься и результаты вычислительного эксперимента, эмпирические и графические зависимости [15]. Иными словами, при решении задач идентификации находит применение любая априорная информация о динамической системе для построения искомых зависимостей.

Попытки преодолеть эти проблемы предпринимались с разработкой приближенно-аналитических методов [16, 17], заключающихся в нахождении некоторой аналитической функции, с заданной степенью точности описывающей динамику процесса исследуемой системы.

Существующие численно-аналитические методы исследования многомерных динамических систем в первую очередь ориентированы на случаи, связанные с решением прикладных задач, требующих вычислений в реальном времени [18]. Применительно к системам электропривода к ним относятся задачи параметрической идентификации, оценки неизмеряемых переменных состояния динамической системы [19–21]. Тем самым основной объем вычислений выносится на предварительный этап, несвязанный непосредственно с наблюдением за самой динамической системой.

Среди известных и распространенных в научной и инженерной практике приближенно-аналитических методов можно выделить метод Чаплыгина [22], преобразование Гильберта–Хуанга [23], включающее в себя эмпирическую модовую декомпозицию [24], а также другие методы, основанные на понимании физики работы динамической системы (учет априорной информации) [25].

Применение аналитических и приближенно-аналитических моделей при исследовании линейных динамических систем позволяет не только получать более полную информацию о спектре сигналов переменных состояния, но и аналитически применять весь существующий математический аппарат теории автоматического управления к рассматриваемой динамической системе такой как, например, матрицы управляемости и наблюдаемости Грама [26], матрица Якоби и др.

#### Постановка задачи и методы исследования

Рассматривается динамическая система «широтно-импульсный преобразователь – двигатель постоянного тока с независимым возбуждением» («ШИП–ДПТ НВ»).

В классической постановке задачи исследования данной динамической системы математическая модель ШИП имеет вид линейного дифференциального уравнения первого порядка и в структурных схемах после прямого преобразования Лапласа при

нулевых начальных условиях представляется простейшим апериодическим звеном первого порядка с постоянной времени, равной половине периода ШИМ [267]. Использование такого подхода позволяет существенно упростить аналитический расчет переходных процессов в динамической системе, однако полученные решения не отражают в полной мере характер изменения во времени переменных состояния.

В настоящей статье предложено аналитическое решение системы дифференциальных уравнений динамической системы «ШИП–ДПТ НВ», где входной сигнал системы от ШИП представлен прямоугольной периодической функцией.

В работе использованы методы математического моделирования и операционного исчисления для решения систем дифференциальных уравнений, методы прямого и обратного преобразования Лапласа, методы теории электропривода.

#### Математическая модель динамической системы «ШИП–ДПТ НВ»

При составлении математической модели динамической системы «ШИП–ДПТ НВ» были приняты следующие допущения:

- 1) транзисторные ключи ШИП идеальны, переключения происходят мгновенно;
- 2) параметры динамической системы (поток возбуждения, активное сопротивление и индуктивность обмотки якоря, приведенный момент инерции) постоянны во времени;
- 3) реакция якоря полностью скомпенсирована;
- 4) насыщение магнитопровода якоря отсутствует.

Система дифференциальных уравнений (СДУ), описывающих динамику двигателя постоянного тока с независимым возбуждением в матричном виде в нормальной форме Коши [28] имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{\text{я}}(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} & -\frac{c}{L_{\text{я}}} \\ \frac{c}{J} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\text{я}}(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{U(t)}{L_{\text{я}}} \\ -\frac{M_{\text{с}}(t)}{J} \end{bmatrix},$$

где  $i_{\text{я}}(t)$  – ток якоря, А;  $\omega(t)$  – угловая скорость вращения ротора, рад/с;  $R_{\text{я}}$  – активное сопротивление обмотки якоря, Ом;  $L_{\text{я}}$  – индуктивность обмотки якоря, Гн;  $c$  – конструктивная постоянная ДПТ, В/(рад/с);  $J$  – приведенный момент инерции электропривода, кг·м<sup>2</sup>;  $U(t)$  – входное напряжение, В;  $M_{\text{с}}(t)$  – статический момент нагрузки, Н·м;  $t$  – время, с.

Получим математическую модель двигателя постоянного тока с независимым возбуждением в операторном виде с помощью прямого преобразования Лапласа с ненулевыми начальными условиями:

$$p \begin{bmatrix} I_{\text{я}}(p) \\ \omega(p) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_{\text{я}}(0) \\ \omega(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} & -\frac{c}{L_{\text{я}}} \\ \frac{c}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\text{я}}(p) \\ \omega(p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{U(p)}{L_{\text{я}}} \\ -\frac{M_{\text{с}}(p)}{J} \end{bmatrix},$$

где  $p$  – оператор Лапласа.

Математическую модель ШИП определим в виде прямоугольного периодического сигнала, представляющего собой сумму задержанных функций Хевисайда [29]:

$$U_{\text{ШИМ}}(t) = U_d \sum_{k=0}^N [1(t - 2k\theta) - 1(t - (2k + 1)\theta)],$$

$$\theta = \frac{T_{\text{ШИМ}}}{2},$$

в операторной форме:

$$U_{\text{ШИМ}}(p) = \frac{U_d}{p} \left[ \sum_{k=0}^N \exp(-2kp\theta) - \sum_{k=0}^N \exp(-(2k + 1)p\theta) \right],$$

где  $N$  – количество интервалов расчета (удвоенное число пульсаций ШИП за расчетный период времени);  $k$  – шаг расчета;  $U_d$  – напряжение звена постоянного тока ШИП, В.

Таким образом, математическая модель в операторной форме исследуемой динамической системы «ШИП–ДПТ НВ» в общем случае имеет вид:

$$p \begin{bmatrix} I_{\text{я}}(p) \\ \omega(p) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_{\text{я}}(0) \\ \omega(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} & -\frac{c}{L_{\text{я}}} \\ \frac{c}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\text{я}}(p) \\ \omega(p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{U_{\text{ШИМ}}(p)}{L_{\text{я}}} \\ -\frac{M_{\text{с}}(p)}{Jp} \end{bmatrix}.$$

Представим данную систему линейных алгебраических уравнений в более удобной для анализа форме переносом слагаемых с неизвестными в левую часть, а вектора начальных условий – в правую:

$$\begin{bmatrix} \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} + p & \frac{c}{L_{\text{я}}} \\ -\frac{c}{J} & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\text{я}}(p) \\ \omega(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_{\text{ШИМ}}(p)}{L_{\text{я}}} + i_{\text{я}}(0) \\ -\frac{M_{\text{с}}(p)}{Jp} + \omega(0) \end{bmatrix}.$$

### Исследование аналитической модели «ШИП–ДПТ НВ» в динамических режимах

В качестве объекта исследования выберем двигатель постоянного тока с независимым возбуждением марки 2ПФ200L, паспортные параметры которого представлены в таблице.

**Таблица.** Паспортные параметры ДПТ НВ 2ПФ200L4  
**Table.** Passport parameters of DC motor with independent excitation 2PF200L4

Наименование параметра Parameter name	Значение Value
Номинальное напряжение $U_{\text{ном}}$ , В Rated voltage $U_{\text{ном}}$ , V	440
Номинальная мощность $P_2$ , кВт Rated power $P_2$ , kW	42
Номинальная частота вращения $n_{\text{ном}}$ , об/мин Rated rotation frequency $n_{\text{ном}}$ , rpm	2360
Максимальная частота вращения $n_{\text{макс}}$ , об/мин Maximum rotation frequency $n_{\text{макс}}$ , rpm	3500
Коэффициент полезного действия/Efficiency $\eta$ %	90,5
Эквивалентное сопротивление обмотки якоря, приведенное к 75 °С $R_{\text{я}}$ , Ом Equivalent resistance of armature winding, reduced to 75°C $R_{\text{я}}$ , Ohm	0,114
Индуктивность обмотки якоря $L$ , мГн Armature winding inductance $L$ , mH	2,1
Приведенный момент инерции $J$ , кг·м <sup>2</sup> Reduced moment of inertia $J$ , kg·m <sup>2</sup>	0,3

Проведем анализ динамики режимов пуска, наброса нагрузки и реверса двигателя. Положим частоту переключений ШИМ равной  $f_{\text{ШИМ}}=1$  кГц.

1. Пуск двигателя на холостом ходу.

Начальные условия  $i_{\text{я}}(0)$ ,  $\omega(0)$  и статический момент нагрузки  $M_{\text{с}}(0)$  равны нулю. Математическая модель системы «ШИП–ДПТ-НВ» принимает вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} + p & \frac{c}{L_{\text{я}}} \\ -\frac{c}{J} & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\text{я}}(p) \\ \omega(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_{\text{ШИМ}}(p)}{L_{\text{я}}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение матричного уравнения найдем методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} + p & \frac{c}{L_{\text{я}}} \\ -\frac{c}{J} & p \end{vmatrix}, \quad \Delta_I = \begin{vmatrix} \frac{U_{\text{ШИМ}}(p)}{L_{\text{я}}} & \frac{c}{L_{\text{я}}} \\ 0 & p \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{\omega} = \begin{vmatrix} \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} + p & \frac{U_{\text{ШИМ}}(p)}{L_{\text{я}}} \\ -\frac{c}{J} & 0 \end{vmatrix}.$$

Образы переменных состояния динамической системы:

$$I(p) = \frac{\Delta_I}{\Delta} = \frac{U_{\text{ШИМ}}(p) \cdot p}{L_{\text{я}} \left( p^2 + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} p + \frac{c^2}{JL_{\text{я}}} \right)},$$

$$\omega(p) = \frac{\Delta_{\omega}}{\Delta} = \frac{cU_{\text{ШИМ}}(p)}{JL_{\text{я}} \left( p^2 + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} p + \frac{c^2}{JL_{\text{я}}} \right)}.$$

Оригиналы аналитических функций тока и скорости найдем по первой теореме разложения [29]. Запишем изображение функции  $F(p)$ , содержащей в себе характеристический полином системы:

$$F(p) = \frac{U_d}{p^2 + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} p + \frac{c^2}{JL_{\text{я}}}}.$$

Поскольку коэффициенты знаменателя рациональны, предположим случай комплексно-сопряженных корней:

$$p_{1,2} = -\frac{R_{\text{я}}}{2L_{\text{я}}} \pm \sqrt{\left(\frac{R_{\text{я}}}{2L_{\text{я}}}\right)^2 - \frac{c^2}{JL_{\text{я}}}} = -\alpha \pm j\beta.$$

Решение будем вести путем определения оригиналов функций на каждом полупериоде работы ШИМ. Запишем выражение для первого участка от 0 до  $\theta$  (пуск с нулевыми начальными условиями) по первой теореме разложения:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P_m(p_k)}{Q'_n(p_k)} e^{p_k t}.$$

Здесь

$$P_m(p_k) = U_d, \quad Q_n(p_k) = p^2 + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} p + \frac{c^2}{JL_{\text{я}}},$$

$$Q'_n(p_k) = 2p_k + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}}.$$

Тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{U_d}{2p_k + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}}} e^{p_k t} = \frac{U_d e^{(-\alpha + j\beta)t}}{2(-\alpha + j\beta) + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}}} +$$

$$+ \frac{U_d e^{(-\alpha - j\beta)t}}{2(-\alpha - j\beta) + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}}} = \frac{U_d e^{-\alpha t} \sin(\beta t)}{\beta}.$$

Таким образом, изображения тока и скорости имеют вид:

$$I(p) = \frac{F(p)}{L_{\text{я}}}, \quad \omega(p) = \frac{cF(p)}{JL_{\text{я}}p}.$$

Оригинал функции тока:

$$i(t) = \frac{f(t)}{L_{\text{я}}} = \frac{U_d e^{-\alpha t} \sin(\beta t)}{L_{\text{я}} \beta}.$$

Оригинал скорости найдем по теореме интегрирования оригинала:

$$\omega(t) = \frac{c}{JL_{\text{я}}} \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{c}{JL_{\text{я}}} \int_0^t \frac{U_d e^{-\alpha \tau} \sin(\beta \tau)}{\beta} d\tau =$$

$$= \frac{cU_d}{\beta JL_{\text{я}} (\alpha^2 + \beta^2)} (\beta - e^{-\alpha t} (\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t))).$$

На втором участке от  $\theta$  до  $2\theta$  (собственное движение динамической системы при ненулевых начальных условиях) определители переменных для решения методом Крамера:

$$\Delta_I = \begin{vmatrix} i(t_k) & \frac{c}{L_{\text{я}}} \\ \omega(t_k) & p \end{vmatrix}, \quad \Delta_{\omega} = \begin{vmatrix} \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} + p & i(t_k) \\ -\frac{c}{J} & \omega(t_k) \end{vmatrix},$$

где  $i(t_k)$ ,  $\omega(t_k)$  – ток и угловая скорость вращения в конце интервала на предыдущем шаге расчета.

Изображения переменных состояния:

$$i(p) = \frac{\Delta_I}{\Delta} = \frac{-\frac{c\omega(t_k)}{L} + pi(t_k)}{p^2 + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} p + \frac{c^2}{JL_{\text{я}}}},$$

$$\omega(p) = \frac{\Delta_{\omega}}{\Delta} = \frac{\frac{ci(t_k)}{J} + \frac{R\omega(t_k)}{L} + p\omega(t_k)}{p^2 + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} p + \frac{c^2}{JL_{\text{я}}}}.$$

Оригиналы функций определим используя теорему о дифференцировании оригинала. Характеристический полином на участках собственного движения системы:

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} p + \frac{c^2}{JL_{\text{я}}}}.$$

Оригиналы функций переменных состояния:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= -\frac{c\omega(t_k)}{L_{\text{я}}} f(t) + i(t_k) \frac{d}{dt} f(t) = \\
 &= -\frac{c\omega(t_k)}{L_{\text{я}}\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) + \frac{i(t_k)}{\beta} \frac{d}{dt} (e^{-\alpha t} \sin(\beta t)) = \\
 &= -\frac{c\omega(t_k)}{L_{\text{я}}\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) + \\
 &+ \frac{i(t_k)}{\beta} e^{-\alpha t} (-\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t)), \\
 \omega(t) &= \frac{cL_{\text{я}}i(t_k) + JR_{\text{я}}\omega(t_k)}{JL_{\text{я}}} \frac{e^{-\alpha t} \sin(\beta t)}{\beta} + \\
 &+ \frac{\omega(t_k)}{\beta} \frac{d}{dt} (e^{-\alpha t} \sin(\beta t)) = \\
 &= \frac{cL_{\text{я}}i(t_k) + JR_{\text{я}}\omega(t_k)}{JL_{\text{я}}} \frac{e^{-\alpha t} \sin(\beta t)}{\beta} + \\
 &+ \frac{\omega(t_k)}{\beta} e^{-\alpha t} (-\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t)).
 \end{aligned}$$

На третьем участке расчета от 2θ до 3θ имеем пуск с ненулевыми начальными условиями. Изображения переменных состояния принимают вид:

$$\Delta_I = \begin{vmatrix} \frac{U_d}{pL_{\text{я}}} + i(t_k) & \frac{c}{L_{\text{я}}} \\ \omega(t_k) & p \end{vmatrix}, \quad \Delta_{\omega} = \begin{vmatrix} \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} + p & \frac{U_d}{pL_{\text{я}}} + i(t_k) \\ -\frac{c}{J} & \omega(t_k) \end{vmatrix}.$$

$$I(p) = \frac{\Delta_I}{\Delta} = \frac{\frac{U_d}{L_{\text{я}}} - \frac{c\omega(t_k)}{L_{\text{я}}} + pi(t_k)}{p^2 + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} p + \frac{c^2}{JL_{\text{я}}}},$$

$$\omega(p) = \frac{\Delta_{\omega}}{\Delta} = \frac{\frac{cU_d}{JL_{\text{я}}p} + \frac{ci(t_k)}{J} + \frac{R\omega(t_k)}{L_{\text{я}}} + p\omega(t_k)}{p^2 + \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} p + \frac{c^2}{JL_{\text{я}}}}.$$

Воспользовавшись теоремами об интегрировании и дифференцировании оригиналов, найдем оригиналы аналитических функций переменных состояния на третьем участке:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{U_d - c\omega(t_k)}{L_{\text{я}}\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) + \\
 &+ \frac{i(t_k)}{\beta} e^{-\alpha t} (-\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega(t) &= \frac{cL_{\text{я}}i(t_k) + JR_{\text{я}}\omega(t_k)}{JL_{\text{я}}} \frac{e^{-\alpha t} \sin(\beta t)}{\beta} + \frac{\omega(t_k)}{\beta} \times \\
 &\times e^{-\alpha t} (-\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t)) + \\
 &+ \frac{cU_d}{\beta JL_{\text{я}}} (\beta - e^{-\alpha t} (\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t))).
 \end{aligned}$$

Очевидно, что выражения для переменных состояния на первом участке являются частным случаем выражения на третьем, если начальные условия  $\omega(t_k)$ ,  $i(t_k)$  равны нулю. Таким образом, для вычисления значения переменных состояния в произвольный момент времени достаточно знать значения функций на концах предыдущих участков.

Проведем апробацию полученных функций для динамической системы «ШИП–ДПТ НВ». На рис. 1 представлен переходный процесс по скорости динамической системы с применением полученных аналитических функций.

2. Реверс ДПТ НВ, работавшего на холостом ходу.

Матричное уравнение динамической системы при реверсе в общем случае имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} + p & \frac{c}{L_{\text{я}}} \\ -\frac{c}{J} & p \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_{\text{я}}(p) \\ \omega(p) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-U_{\text{ШИМ}}(p)}{L_{\text{я}}} + i(t_k) \\ \omega(t_k) \end{pmatrix}.$$

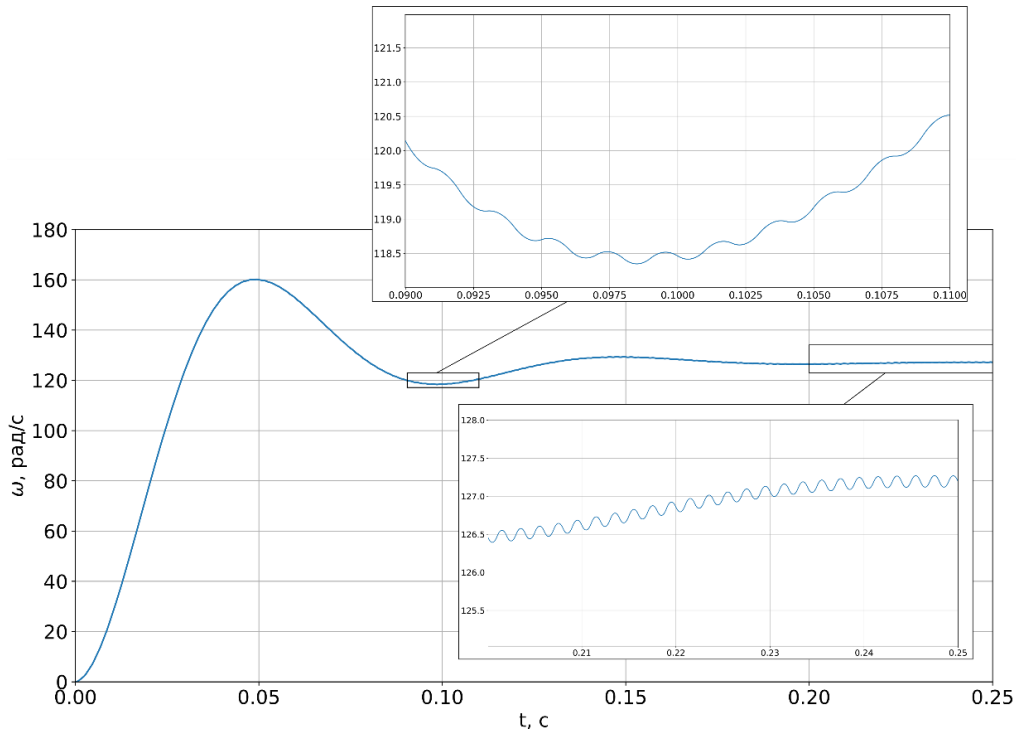
Решение матричного уравнения аналогично предыдущему пункту проводится с помощью разбиения решения на участки, равные полупериоду ШИМ. Запишем аналитические выражения для переменных состояния.

Интервал расчета с приложенным напряжением:

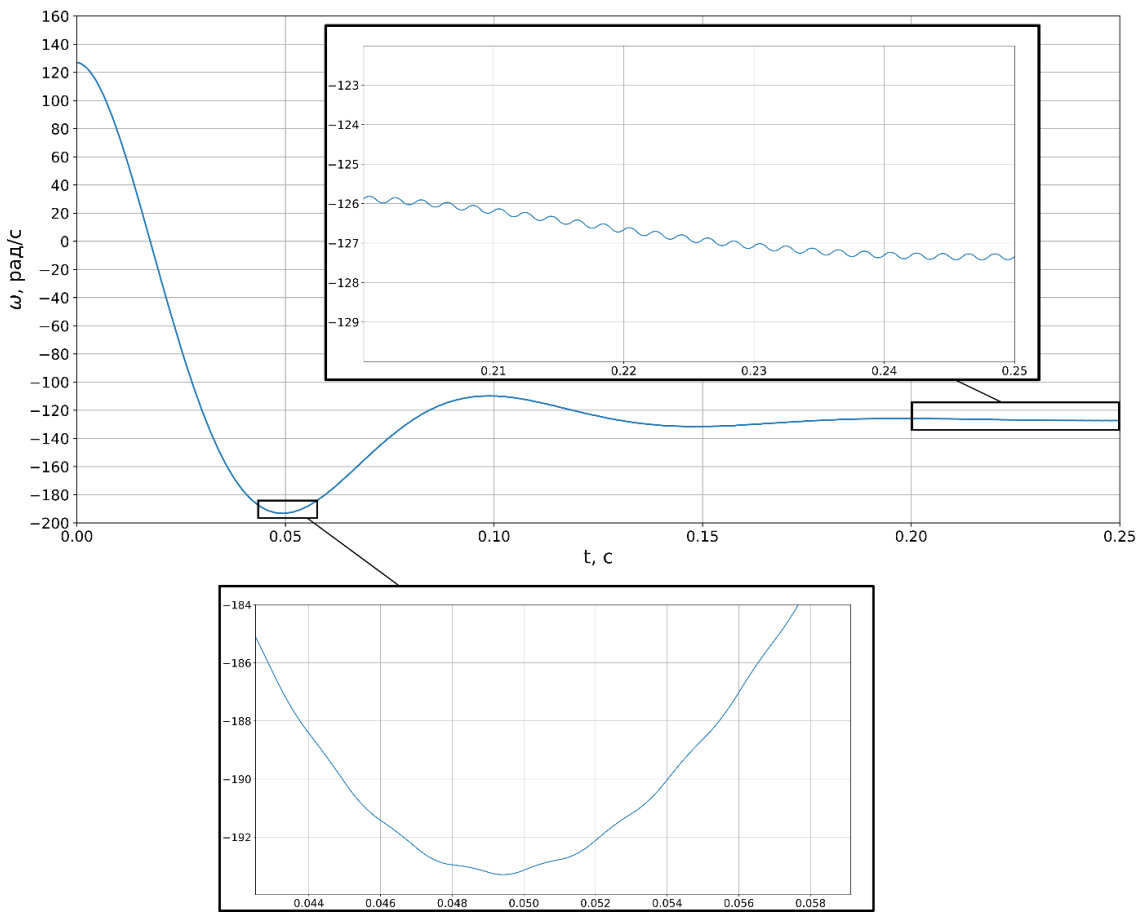
$$\begin{aligned}
 i(t) &= -\frac{U_d + c \cdot \omega(t_k)}{L_{\text{я}} \cdot \beta} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\beta t) + \\
 &+ \frac{i(t_k)}{\beta} \cdot e^{-\alpha t} (-\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega(t) &= \frac{cL_{\text{я}}i(t_k) + JR_{\text{я}}\omega(t_k)}{JL_{\text{я}}} \frac{e^{-\alpha t} \sin(\beta t)}{\beta} + \frac{\omega(t_k)}{\beta} \times \\
 &\times e^{-\alpha t} (-\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t)) - \\
 &- \frac{cU_d}{\beta JL_{\text{я}}} (\beta - e^{-\alpha t} (\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t))).
 \end{aligned}$$

Расчет тока и скорости на интервале собственного движения системы при ненулевых начальных условиях проводится согласно выражениям (13) и (14), соответственно. Построим график переходного процесса при реверсе ДПТ НВ, работавшего на холостом ходу, с применением полученных функций.



**Рис. 1.** *Переходный процесс по скорости в режиме пуска ДПТ НВ на холостом ходу*  
**Fig. 1.** *Transient speed process in starting mode of DC motor with independent excitation at idle run*



**Рис. 2.** *Реверс ДПТ НВ, работавшего на холостом ходу*  
**Fig. 2.** *Reverse of DC motor with independent excitation operating at idle run*

3. Наброс нагрузки в ДПТ НВ, работающем на холостом ходу.

Матричное уравнение динамической системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{R_{я}}{L_{я}} + p & \frac{c}{L_{я}} \\ -\frac{c}{J} & p \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_{я}(p) \\ \omega(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_{\text{шим}}(p)}{L_{я}} + i(t_k) \\ -\frac{M_c(t_k)}{Jp} + \omega(t_k) \end{bmatrix}.$$

где  $M_c(t_k)$  – статический момент нагрузки в конце интервала на предыдущем шаге расчета

$$\Delta_I = \begin{vmatrix} \frac{U_d}{pL_{я}} + i(t_k) & \frac{c}{L_{я}} \\ -\frac{M_c(t_k)}{Jp} + \omega(t_k) & p \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{\omega} = \begin{vmatrix} \frac{R_{я}}{L_{я}} + p & \frac{U_d}{pL_{я}} + i(t_k) \\ -\frac{c}{J} & -\frac{M_c(t_k)}{Jp} + \omega(t_k) \end{vmatrix}.$$

Получим изображения функций переменных состояния методом Крамера и их оригиналы, применяя теоремы интегрирования и дифференцирования оригиналов:

Интервал расчета с приложенным напряжением:

$$I(p) = \frac{\Delta_I}{\Delta} = \frac{\frac{cM_c(t_k)}{JL_{я}p} + \frac{U_d - c\omega(t_k)}{L_{я}} + pi(t_k)}{p^2 + \frac{R_{я}}{L_{я}}p + \frac{c^2}{JL_{я}}},$$

$$\omega(p) = \frac{\Delta_{\omega}}{\Delta} = \frac{\frac{cU_d - M_c(t_k)R}{JL_{я}p} + \frac{ci(t_k) - M_c(t_k)}{J} + \frac{R\omega(t_k)}{L_{я}} + p\omega(t_k)}{p^2 + \frac{R_{я}}{L_{я}}p + \frac{c^2}{JL_{я}}}.$$

$$i(t) = \frac{U_d - c\omega(t_k)}{L_{я}\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) + \frac{i(t_k)}{\beta} + \frac{cM_c(t_k)}{\beta JL_{я}(\alpha^2 + \beta^2)} (\beta - e^{-\alpha t} (\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t))),$$

$$\omega(t) = \frac{(ci(t_k) - M_c(t_k))L_{я} + JR_{я}\omega(t_k)}{JL_{я}} \times \frac{e^{-\alpha t} \sin(\beta t)}{\beta} + \frac{\omega(t_k)}{\beta} e^{-\alpha t} \times (-\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t)) + \frac{cU_d - M_c(t_k)R}{\beta JL_{я}(\alpha^2 + \beta^2)} \times (\beta - e^{-\alpha t} (\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t))).$$

Интервал собственного движения системы при ненулевых начальных условиях:

$$I(p) = \frac{\frac{cM_c(t_k)}{JL_{я}p} + \frac{-c\omega(t_k)}{L_{я}} + pi(t_k)}{p^2 + \frac{R_{я}}{L_{я}}p + \frac{c^2}{JL_{я}}},$$

$$\omega(p) = \frac{-\frac{M_c(t_k)R}{JL_{я}p} + \frac{ci(t_k) - M_c(t_k)}{J} + \frac{R\omega(t_k)}{L_{я}} + p\omega(t_k)}{p^2 + \frac{R_{я}}{L_{я}}p + \frac{c^2}{JL_{я}}}.$$

$$i(t) = \frac{-c \cdot \omega(t_k)}{L_{я}\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) + \frac{i(t_k)}{\beta} \times e^{-\alpha t} (-\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t)) + \frac{cM_c(t_k)}{\beta JL_{я}(\alpha^2 + \beta^2)} (\beta - e^{-\alpha t} (\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t))),$$

$$\omega(t) = \frac{(ci(t_k) - M_c(t_k))L_{я} + JR_{я}\omega(t_k)}{JL_{я}} \times \frac{e^{-\alpha t} \sin(\beta t)}{\beta} + \frac{\omega(t_k)}{\beta} e^{-\alpha t} \times (-\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t)) + \frac{-M_c(t_k)R}{\beta JL_{я}(\alpha^2 + \beta^2)} \times (\beta - e^{-\alpha t} (\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t))).$$

График переходного процесса наброса нагрузки в динамической системе «ШИП–ДПТ НВ» приведен на рис. 3.

Анализ графиков переходных режимов по скорости (рис. 1–3) позволяет сделать вывод о наличии высокочастотных составляющих в выходных сигналах скорости динамической системы «ШИП–ДПТ НВ», связанных с пульсирующим характером входного напряжения, что подтверждает корректность полученных аналитических выражений.



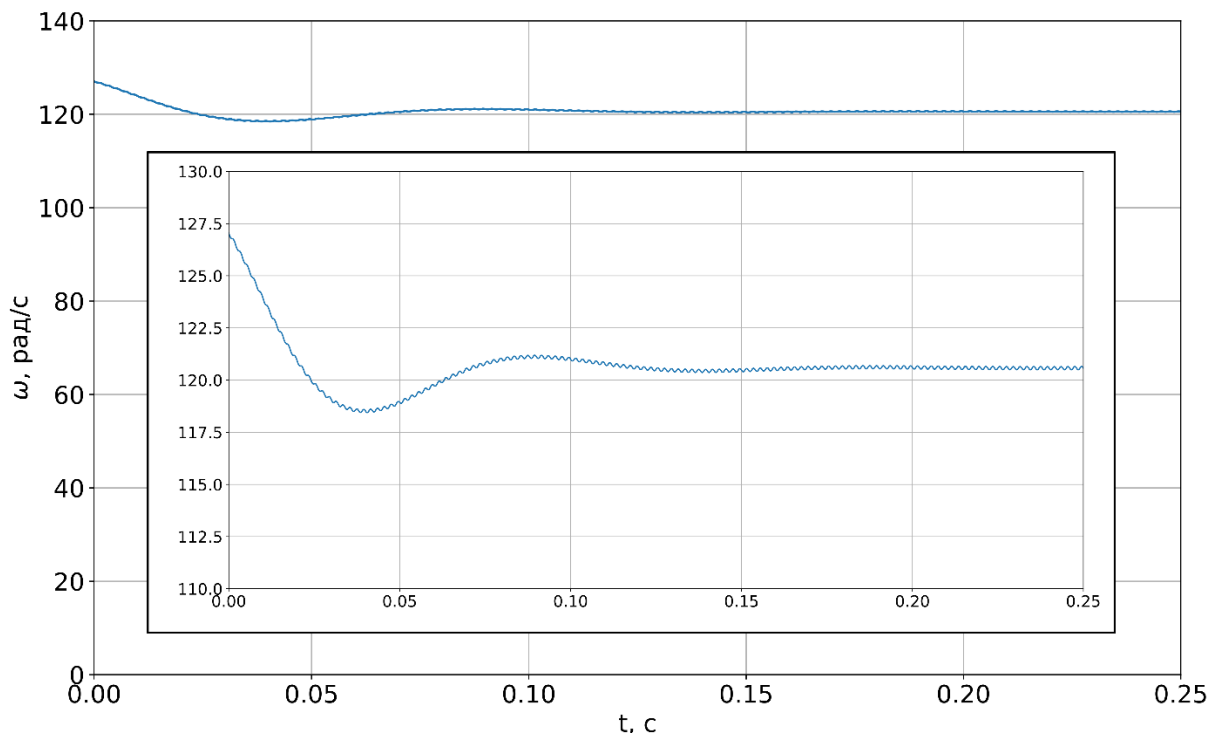


Рис. 3. Наброс нагрузки в ДПТ НВ

Fig. 3. Load surge in independently excited DC motor

### Заклучение

Распространенность практики моделирования динамической системы «ШИП–ДПТ НВ» с представлением ШИП как апериодического звена первого порядка обусловлена существенным упрощением (редуцированием) математической модели системы и, как следствие, повышением скорости расчетов как аналитическими, так и численными методами. Тем не менее такой подход ведет к потере информации о высокочастотных процессах, протекающих в системе при импульсных входных воздействиях.

Исследование динамической системы электропривода при задании входного напряжения в виде суммы задержанных функций Хевисайда для более корректного представления ШИП с использованием методов численного интегрирования также не позволяет получить информацию о высокочастотных составляющих переменных состояния, поскольку на дискретные модели накладываются ограничения, связанные с теоремой Котельникова–Шеннона–Найквиста.

Несмотря на широкое распространение численных методов исследования динамических систем, позволяющих находить решения систем дифференциальных уравнений для широкого класса инженерных и научно-технических задач с высокой степенью точности и за приемлемое время, авторы

считают, что не стоит отказываться от преимуществ аналитического решения, если оно может быть получено аналитическими или приближенно-аналитическими методами. Аналитические выражения для переменных состояния динамических систем позволяют применять к ним весь существующий аппарат теории автоматического управления без перехода в дискретное время, а также наиболее полно исследовать физические процессы в системе без потери информации о высокочастотных составляющих.

Полученная в статье аналитическая модель динамической системы «ШИП–ДПТ НВ» позволяет исследовать различные режимы работы электропривода с получением полной информации о всех процессах, протекающих в системе, и может быть использована при разработке и исследовании новых электродвигателей постоянного тока с независимым возбуждением, в частности, для получения спектрального состава выходных параметров. Кроме того, полученные результаты могут быть полезны в рамках задачи совершенствования систем питания и управления электроприводами постоянного тока, а также при аналитическом моделировании и исследовании синхронных электродвигателей с постоянными магнитами и асинхронных электродвигателей в режиме заторможенного ротора.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Применение технологии цифровых двойников при разработке тяговых асинхронных электродвигателей / А.В. Захаров, А.М. Зайцев, А.С. Кобелев, Л.Н. Макаров, Д.Ю. Розанов // *Электротехника*. – 2022. – № 4. – С. 26–33.
2. Цифровой двойник погружного электродвигателя на основе методов планирования эксперимента / В.З. Ковалев, Э.И. Хусаинов, Е.С. Балыклов, О.В. Архипова, Р.Н. Хамитов, А.С. Глазырин // *Электротехнические и информационные комплексы и системы*. – 2022. – Т. 18. – № 2. – С. 32–44. DOI: 10.17122/1999-5458-2022-18-2-32-44
3. Adomou A.A., Chakib A. Energy efficiency model-based digital shadow for induction motors: towards the implementation of a digital twin // *Engineering Science and Technology, an International Journal*. – 2023. – Vol. 44. – 101469. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jestch.2023.101469>
4. ГОСТ Р 57700.37-2021. Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий. Общие положения: национальный стандарт Российской Федерации: издание официальное: утв. и вв. в действие Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 16 сентября 2021 г. № 979-ст: введен впервые: дата введения 2022-01-01. – М.: Стандартинформ, 2021. – 15 с.
5. Зюзев А.М., Текле С.И. Динамические симуляторы в задачах диагностики штанговых глубинно-насосных установок // *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*. – 2022. – Т. 333. – № 1. – С. 168–177. DOI <https://doi.org/10.18799/24131830/2022/1/3285>
6. Семенов А.В., Зюзев А.М., Текле С.И. Симулятор штанговой глубинно насосной установки: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020666580, 11.12.2020, заявка № 2020665912, 4 дек 2020.
7. Боловин Е.В., Глазырин А.С. Способы повышения обусловленности матриц при решении систем разностных уравнений в задачах идентификации параметров динамических объектов // *Известия Томского политехнического университета*. – 2013. – Т. 322. – № 2. – С. 51–55.
8. Фурсов В.А. Идентификация систем по малому числу наблюдений. – Самара: Изд-во СГАУ, 2007. – 81 с.
9. Козлова Л.Е. Разработка нейросетевого наблюдателя угловой скорости ротора в электроприводе по схеме ТРН-АД: дис. ... канд. техн. наук. – Томск, 2016. – 144 с.
10. Обмотка асинхронного двигателя: пат. 111723 Российская Федерация, МПК H02K 3/28 H02K 17/14 2011125501/07, заявл. 21.06.2011: опубл. 20.12.2011.
11. Design and Analysis of Star-Delta Hybrid Windings for High-Voltage Induction Motors / Lei Y., Zhengming Zhao, Shuping Wang, D.G. Dorrell, Wei Xu // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. – 2010. – Vol. 58. – Iss. 9. – P. 3758–3767. DOI: 10.1109/TIE.2010.2054058
12. Способ управления автономным инвертором напряжения: пат. 2620129 Рос. Федерация, № 2016116345: заявл. 26.04.2016: опубл. 23.05.2017. – СПб, 2016. – 12 с.
13. Татаринев Д.Е., Григорян А.С., Пименова И.А. Обеспечение электромеханической совместимости в частотно-регулируемых асинхронных электроприводах при регулировании частоты // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Энергетика*. – 2016. – Т. 16. – № 1. – С. 80–86.
14. Котельников В.А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // *Успехи физических наук*. – 2006. – Т. 176. – № 7. – С. 762–770. DOI: 10.1070/PU2006v049n07ABEH006160
15. Драница Ю.П., Драница А.Ю. Некоторые постановки задач на основе динамического моделирования // *Вестник МГТУ*. – 2009. – Т. 12. – № 2. – С. 179–188.
16. Иванов С.Е., Телевной А.Д. Численно-аналитический метод преобразований для анализа нелинейных математических моделей полиномиальной структуры // *Вестник АГТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2022. – № 2. – С. 97–109. DOI: <https://doi.org/10.24143/2072-9502-2022-2-97-109>
17. Старостин И.Е., Дружинин А.А. Аналитическое приближение решений уравнений метода математического прототипирования энергетических процессов путем качественного анализа этих уравнений // *Надежность и качество сложных систем*. – 2023. – № 2. – С. 23–31. DOI: 10.21685/2307-4205-2023-2-3
18. Численно-аналитический метод описания и оценивания выходных параметров многомерного динамического объекта. Ч. 1 / Ю.Г. Бульчев, А.Г. Кондрашов, П.Ю. Раду, А.В. Ячменёв // *Автометрия*. – 2020. – Т. 56. – № 3. – С. 68–80. DOI: 10.15372/AUT20200308
19. Вдовин В.В., Панкратов В.В. Синтез адаптивного наблюдателя координат бездатчикового асинхронного электропривода // *Известия Томского политехнического университета*. – 2012. – Т. 320. – № 4. – С. 147–153.
20. Глазырин А.С., Боловин Е.В. Идентификация параметров асинхронных электродвигателей с неподвижным короткозамкнутым ротором на основе разностных схем // *Известия Томского политехнического университета*. – 2012. – Т. 321. – № 5. – С. 101–105.
21. Глазырин А.С. Разработка наблюдателя полного порядка с оперативным мониторингом момента сопротивления для погружных асинхронных электродвигателей / А.С. Глазырин, С.Н. Кладиев, К.С. Афанасьев, В.В. Тимошкин, И.Г. Слепнёв, В.И. Полишук, Сандор Халаз // *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*. – 2018. – Т. 329. – № 2. – С. 118–126.
22. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – СПб: Лань, 2022. – 400 с.
23. Signal processing for remote sensing / ed. by C.H. Chen. – Boca Raton, London, NY: CRC Press, 2007. – 276 p.
24. Давыдов В.А., Давыдов А.В. Очистка геофизических данных от шумов с использованием преобразования Гильберта–Хуанга. URL: [https://studylib.ru/doc/232943/ckachat\\_-\\_stat\\_yu-celikom-v-formate-ms-word](https://studylib.ru/doc/232943/ckachat_-_stat_yu-celikom-v-formate-ms-word) (дата обращения: 20.10.2023).
25. Acton J.R., Squire P.T. Solving equations with physical understanding. Boca Raton: CRC Press, 1985. – 219 p.
26. Митришкин Ю.В. Линейные математические модели динамических систем с управлением. – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 464 с.
27. Терехов В.М. Элементы автоматизированного электропривода. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 224 с.

28. Глазырин А.С. Математическое моделирование электромеханических систем. Аналитические методы. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 206 с.
29. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2001. – 376 с.

### Информация об авторах

**Александр Савельевич Глазырин**, доктор технических наук, профессор отделения электроэнергетики и электротехники Инженерной школы энергетики Национального исследовательского Томского политехнического университета, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30; профессор Политехнической школы Югорского государственного университета, Россия, 628012, г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, 16; asglazyrin@tpu.ru

**Евгений Игоревич Попов**, ассистент кафедры электроэнергетики Тюменского индустриального университета, Россия, 625000, г. Тюмень, ул. Володарского, 38. popov72@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-2088-4280>

**Владимир Анатольевич Копырин**, кандидат технических наук, доцент кафедры электроэнергетики Тюменского индустриального университета, Россия, 625000, г. Тюмень, ул. Володарского, 38. kopyrinva@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-7515-4018>

**Сергей Николаевич Кладиев**, кандидат технических наук, доцент отделения электроэнергетики и электротехники Инженерной школы энергетики Национального исследовательского Томского политехнического университета, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30. kladiev@tpu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9432-0176>

Поступила в редакцию: 28.11.2023

После рецензирования: 27.12.2023

Принята к публикации: 20.12.2023

### REFERENCES

1. Zakharov A.V., Zaitsev A.M., Kobelev A.S., Rozanov D.Y., Makarov L.N. Application of digital-twin technology in developing traction induction motors. *Russian Electrical Engineering*, 2022, vol. 93, no. 4, pp. 235–241.
2. Kovalev V.Z., Khusainov E.I., Balykov E.S., Arhipova O.V., Khamitov R.N., Glazyrin A.S. Digital twin of a submersible electric motor based on design of experiments methods. *Electrical and data processing facilities and systems*, 2022, vol. 18, no. 2, pp. 23–44. (In Russ.) DOI: 10.17122/1999-5458-2022-18-2-32-44.
3. Adomou A.A., Chakib A. Energy efficiency model-based digital shadow for induction motors: towards the implementation of a digital twin. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 2023, vol. 44, 101469. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jestech.2023.101469>
4. SS RF 57700.37-2021. *Computer models and simulation. Digital twins of products. General provisions*. Moscow, Standartinform Publ., 2022. 11 p. (In Russ.)
5. Ziuzev A.M., Teclé S.I. Sucker rod pumping system: challenges to develop diagnostic system and role of dynamic simulator. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2022, vol. 333, no. 1, pp. 168–177. (In Russ.) DOI: <https://doi.org/10.18799/24131830/2022/1/3285>.
6. Semenov A.V., Ziuzev A.M., Teclé S.I. *Simulator of sucker rod pumping system: State registration certificate for computer* 2020666580, 2020. (In Russ.)
7. Bolovin E.V., Glazyrin A.S. Methods of increasing the condition of matrices when solving systems of difference equations in tasks of identifying the parameters of dynamic objects. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 322, no. 2, pp. 51–55. (In Russ.)
8. Fursov V.A. *Identification of systems with a small number of observations*. Samara, SSAU Publ., 2007. 81 p. (In Russ.)
9. Kozlova L.E. *Development of the neural network observer of the angular velocity of the rotor in the electric drive according to the thyristor voltage regulator-asynchronous motor scheme*. Cand. Diss. Tomsk, 2016. 144 p. (In Russ.)
10. Duyunov D.A., Duyunov E.D., Agrikov Y.M. *Induction motor winding*. Patent RF 111723, 2011. (In Russ.)
11. Lei Y., Zhengming Zhao, Shuping Wang, Dorrell D.G., Wei Xu. Design and analysis of star–delta hybrid windings for high-voltage induction motors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2010, vol. 58, Iss. 9, pp. 3758–3767. DOI: 10.1109/TIE.2010.2054058.
12. Kozyaruk D.E., Tatarinov D.E., Vasiliev B.Y. *Autonomous voltage inverter control method*. Patent RF 2620129, 2017. (In Russ.)
13. Tatarinov D.E., Grigorian A.S., Pimenova I.A. Provision of electromechanical compatibility of variable-frequency asynchronous drives with PWM-frequency regulation. *Bulletin of South Ural State University. Series “Power Engineering”*, 2016, vol. 16, no. 1, pp. 80–86. (In Russ.)
14. Kotelnikov V.A. On the transmission capacity of ‘ether’ and wire in electric communications. *Physics-Uspekhi*, 2006, vol. 176, no. 7, pp. 762–770. (In Russ.) DOI: 10.1070/PU2006v049n07ABEH006160.
15. Dranitsa Yu.P., Dranitsa A.Yu. Some formulations of problems based on dynamic modeling. *Bulletin of MSTU*, 2009, vol. 12, no. 2, pp. 179–188. (In Russ.)
16. Ivanov S.E., Televnoy A.D. Numerical-analytical transformation method of analyzing nonlinear mathematical models with polynomial structure. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics*, 2022, no. 2, pp. 97–109. (In Russ.) DOI: <https://doi.org/10.24143/2072-9502-2022-2-97-109>.

17. Starostin I.E., Druzhinin A.A. Analytical approximation of solutions of equations of the method of mathematical prototyping of energy processes by qualitative analysis of these equations. *Reliability and quality of complex systems*, 2023, no. 2, pp. 22–31. (In Russ.) DOI: 10.21685/2307-4205-2023-2-3.
18. Bulychev Y.G., Kondrashov A.G., Radu P.Y., Yachmenev A.V. A numerical-analytic method for describing and estimating input and output parameters of a multidimensional dynamical object: Part I. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 269–279. DOI: 10.3103/S8756699020030036.
19. Vdovin V.V., Pankratov V.V. Synthesis of an adaptive coordinate observer for a sensorless asynchronous electric. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 320, no. 4, pp. 147–153. (In Russ.)
20. Glazyrin A.S., Bolovin E.V. Identification of parameters of induction electric motors with fixed short-clutched rotor based on difference schemes. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 321, no. 5, pp. 101–105. (In Russ.)
21. Glazyrin A.S., Kladiev S.N., Afanasiev K.S., Timoshkin V.V., Slepnev I.G., Polishchuk V.I., Sandor Halasz. Design of full order observer with real time monitoring of load torque for submersible induction motors. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2018, vol. 329, no. 2, pp. 118–126. (In Russ.)
22. Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova E.Z. *Numerical methods of analysis. Approximation of functions, differential and integral equations*. St. Petersburg, Lan Publ., 2022, 400 p. (In Russ.)
23. *Signal processing for remote sensing*. Ed. by C.H. Chen. Boca Raton, London, NY, CRC Press, 2007. 276 p.
24. Davydov V.A., Davydov A.V. *Cleaning geophysical data from noise using the Hilbert–Huang transform*. (In Russ.) Available at: [https://studylib.ru/doc/232943/ckachat.\\_-stat.\\_yu-celikom-v-formate-ms-word](https://studylib.ru/doc/232943/ckachat._-stat._yu-celikom-v-formate-ms-word) (accessed: 20 October 2023).
25. Acton J.R., Squire P.T. *Solving equations with physical understanding*. Boca Raton, CRC Press, 1985. 219 p.
26. Mitrishkin Yu.V. *Linear mathematical models of dynamic systems with control*. Moscow, LENAND Publ., 2019. 464 p. (In Russ.)
27. Terekhov V.M. *Elements of an automated electric drive*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1987. 224 p. (In Russ.)
28. Glazyrin A.S. *Mathematical modeling of electromechanical systems. Analytical methods*. Tomsk, Tomsk Polytechnic University Publ. House, 2011. 206 p. (In Russ.)
29. Panteleev A.V., Yakimova A.S., Bosov A.V. *Ordinary differential equations in examples and problems*. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001. 376 p. (In Russ.)

#### Information about the authors

**Alexander S. Glazyrin**, Dr. Sc., Professor, National Research Tomsk Polytechnic University, 30, Lenin avenue, Tomsk, 634050, Russian Federation; Professor, Yugra State University, 16, Chekhov street, Khanty-Mansiysk, 628012, Russian Federation. [asglazyrin@tpu.ru](mailto:asglazyrin@tpu.ru)

**Evgeniy I. Popov**, Assistant, Industrial University of Tyumen, 38, Volodarsky street, Tyumen, 625000, Russian Federation. [popovei72@mail.ru](mailto:popovei72@mail.ru); <https://orcid.org/0000-0003-2088-4280>

**Vladimir A. Kopyrin**, Cand. Sc., Associate Professor, Industrial University of Tyumen, 38, Volodarsky street, Tyumen, 625000, Russian Federation. [kopyrinva@gmail.com](mailto:kopyrinva@gmail.com); <https://orcid.org/0000-0002-7515-4018>

**Sergey N. Kladiev**, Cand. Sc, Associate Professor, National Research Tomsk Polytechnic University, 30, Lenin avenue, Tomsk, 634050, Russian Federation. [kladiev@tpu.ru](mailto:kladiev@tpu.ru); <https://orcid.org/0000-0001-9432-0176>

Received: 28.11.2023

Revised: 27.12.2023

Accepted: 20.12.2023